

To the Editor of *The Algebraic Review*.

Sir, on October twenty sixth a graduate student of mine, Olga Vyacheslavovna Gersimova, defended an extraordinary dissertation at the Dissertation Council №2 (department of Mechanics and Mathematics, MSU) entitled “*Differential algebraic and geometric foundations of central dynamics on quadratic curves*”. Such a curves has their own charm, and results obtained by Olga during two last years show that the topic is inexhaustible. Nevertheless, she made a perfectly sincere effort to generalize these results to curves of order greater than two. Our symbolic computations show that even in the case of cubic curves the situation changes drastically due to the presence of singularities. The only hope was that we would be able to prove that any solution of these differential equations in formal power series is convergent. Indeed, she managed to do this over the field of complex numbers. Moreover, she came up with a purely algebraic trick which allowed her to avoid Kowalewsakay theorem, and use only a special case of Picard theorem.

Careful analysis of her argument yields to a surprising (from the first glance) and fundamental conclusion: O.V. Gerasimova proved that

every differential-algebraic curve is affine algebraic, in particular, it is finitely defined.

(I want to emphasize that the same result holds over all algebraically closed fields of zero characteristic)

Fim! Would you be willing to communicate a note by O.V.Gerasimova “Affine charm of differential-algebraic curves” to a top math journal of your choice? (russian and english pdf-files are attached)

Sir, - двадцать шестого декабря 2014 года моей ученицей Ольгой Вячеславовной Герасимовой в Учёном Совете N2 (мех-мат факультета МГУ) была защищена *неординарная* (кандидатская) диссертация: “*Дифференциально-алгебраические и геометрические начала центральной динамики на кривых второго порядка.*” У таких кривых особенная статья, и полученные ею здесь за последние два года результаты показывают, что эта тема неисчерпаема. Но она предприняла отчаянную попытку (девичий максимализм!) перенести их на кривые более высоких порядков. Символьные вычисления уже при $N = 3$ продемонстрировали, что наличие особенностей коренным образом меняет ситуацию. Оставалась последняя надежда, что для выписанных ею дифференциальных уравнений удастся доказать, что любые формальные их решения в степенных рядах окажутся сходящимися. Действительно, ей удалось это сделать для поля комплексных чисел, при этом придуманный ею чисто алгебраический трюк разрешения такого типа уравнений относительно входящей в них старшей производной позволил миновать теорему С. Ковалевской, сведя все к частному случаю теоремы Пикара.

Детальный анализ её доказательства привёл к крайне неожиданному (на первый взгляд) и фундаментальному выводу: О. В. Герасимовой доказано, что

*любая дифференциально-алгебраическая кривая
является аффинной алгебраической кривой,
в частности, она конечно определена.*

(Подчеркну, что этот результат справедлив для произвольных алгебраически замкнутых полей, включая положительные характеристики.)

Фим! Не откажите в милости представить заметку О. В. Герасимовой “Аффинное очарование любой дифференциально-алгебраической кривой” в какой-нибудь престижный математический журнал по своему усмотрению. (Русская и английская pdf-версии её оригинального Текста прилагаются.)

- I remain, Sir, your obedient servant, Master Key (Настройщик).

Moscow, Leninskie Gory, November 2.

e-mail: pogudin.gleb@gmail.com.

AN AFFINE CHARM OF ANY DIFFERENTIAL ALGEBRAIC CURVE.

O. V. Gerasimova

Abstract. The text is both an algebraic lesson and a Cartesian master class (a gift of Gods, one should say) for metaphysicians, metaphysicists and their followers. In particular, it outlines why the spectrum of maximal ideals $\text{Spec}_{\mathbf{C}} A$ of a countably dimensional differential $\mathbf{C}$ -algebra A of transcendence degree 1 without zero divisors is locally analytic, which means that for any $\mathbf{C}$ -homomorphism $\psi_M : A \rightarrow \mathbb{C}$ ($M \in \text{Spec}_{\mathbf{C}} A$) and any $a \in A$ the Taylor series $\tilde{\psi}_M(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_M(a^{(m)}) \frac{z^m}{m!}$ has nonzero radius of convergence depending on the element $a \in A$.

Key words: differential algebra, affine curve, parameterisation, power series, analyticity.

The author considers their duty to express deep gratitude towards Igor Rostislavovich Shafarevich for his abiding interest in the results of my studies and support of my work.

*“We catch in flight all dreams of realists,
In diff-equations we are the best.
We are simple algebraists, not physicists,
Light good old Mind is our quest!”
From the L.V.M. manifest. ¹*

We start with one intuitionistic, purely algebraic trick, which enables us to resolve several kinds of differential equations with respect to the highest order derivative.

Lemma on affinity of intermediate subalgebra. Assume that a finitely generated commutative associative integral domain A is an algebra with the identity element over an algebraically closed field k ($\text{char } k = 0, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots$), and its quotient field $Q(A)$ is of transcendency degree 1 over k . Further, if algebras A and B in a sequence of k -subalgebras $A \subseteq C \subseteq B \subset Q(A)$ are finitely generated, then the same is true of the subalgebra C .

Proof. As soon as B is finitely generated, C is a countably dimensional k -algebra. We choose elements $\{e_i | i = 1, 2, \dots\}$ in C as to complement the basis of the k -algebra A to a basis of C . Assign $C_0 \stackrel{\text{def}}{=} A$, $C_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} C_i[e_{i+1}]$, $C_\infty \stackrel{\text{def}}{=} B$ and denote by $\bar{C}_0, \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_i, \dots, \bar{C}_\infty$ the integral closures (“normalizations”) of these finitely generated subalgebras in $Q(A)$. It is well known that each k -subalgebra of that type is finitely generated. Moreover, in the course of the proof (see [1]) it is established that $\bar{C}_i$ is finitely generated as a module over C_i , and consequently Noetherian. Let us show that the ascending chains of k -subalgebras $\{\bar{C}_i\}$, $\{C_i\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) eventually stabilize.

Proposition 1. If in a chain of integral domains $F \subseteq G \subset Q(F)$ the k -subalgebras F and G are finitely generated, $F = \bar{F}$ (i.e. F is integrally closed), and $\deg_k Q(F) = 1$, then the natural mapping $\nu : \text{Spec}_k G \rightarrow \text{Spec}_k F$ satisfies the following conditions:

- (a) ν is injective,
- (b) if ν is surjective, then G coincides with F ,
- (c) $(\text{Spec}_k F) \setminus \nu(\text{Spec}_k G)$ is a finite set.

That is an exact translation of the statement of Corollary 2 of Theorem 2 in section 2 of part 2 (see the monograph [1]).

¹The L.V.M. = The Laboratory of Numerical Methods, the Department of Mathematics and Mechanics, Lomonosov Moscow State University.

From the property (b) we conclude that if $\bar{C}_i \neq \bar{C}_{i+1}$, then there exists a maximal ideal $M \in \text{Spec}_k \bar{C}_i$ that cannot be raised to an ideal in $\text{Spec}_k \bar{C}_{i+1}$, thus it follows from the property (a) that $M \cap \bar{C}_0 \in \text{Spec}_k \bar{C}_0$ cannot be raised to an ideal in $\text{Spec}_k \bar{C}_\infty$. But by virtue of the property (c) there are finite many maximal ideals in $\bar{C}_0$ that cannot be raised to ideals in $\text{Spec}_k \bar{C}_\infty$. Consequently, there are finitely many places where the inclusions are strict in the ascending chain of “normalizations” $\bar{C}_0 \subseteq \bar{C}_1 \subseteq \dots \bar{C}_m \subseteq \dots$, i.e. $\bar{C}_N = \bar{C}_{N+i}$ for a sufficiently large number $N \in \mathbb{N}$ ($i = 1, 2, \dots$) and $C_N \subseteq C = \bigcup_{m=N}^{\infty} C_m \subseteq \bar{C}_N$. But as noted above $\bar{C}_N$ is Noetherian as a module over C_N . Thus its C_N -submodule C is finitely generated and has to coincide with C_{N+q} for a particular $q \in \mathbb{N}$, which proves the proposition.

The following statements are easily deduced from the proposition above.

Theorem 1. Any finitely generated differential k -algebra without zero divisors and of transcendence degree 1 is finitely generated as a commutative associative algebra, in particular this differential k -algebra is finitely presented.

Corollary. The spectrum of all the maximal ideals $\text{Spec}_{\mathbb{C}} A$ of an arbitrary finitely generated differential commutative associative $\mathbb{C}$ -algebra A without zero divisors and of transcendence degree 1 is analytic, i.e. for any $\mathbb{C}$ -homomorphism $\psi_M : A \rightarrow \mathbb{C}$ ($M \in \text{Spec}_{\mathbb{C}} A$) under the Taylor homomorphism $\tilde{\psi}_M : A \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ all the series $\tilde{\psi}_M(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_M(a^{(m)}) \frac{z^m}{m!}$ converge in some neighborhood of zero.

Theorem 2. Let X be an affine irreducible algebraic curve over an algebraically closed field k and $k[X]$ be its algebra of regular functions. Then any k -subalgebra in $k[X]$ is generated by a finite subset of its elements.

Corollary. Let K be a field of transcendency degree 1 over algebraically closed field k , and $\text{Der}_k K$ be algebra Lie of all k -differentiations $K \rightarrow K$. For any $a_1, \dots, a_n \in K$, $D_1, \dots, D_l \in \text{Der}_k K$ is the smallest commutative-associative k -subalgebra A in K , for which $a_1, \dots, a_m \in A$ и $D_i(A) \subset A$ ($i = 1, \dots, l$) is finitely generated.

We should like to illustrate these results and their proofs by particular examples.

1. Differential Picard algebras (see [2]).² Let P be a differential $\mathbb{C}$ -algebra determined by generators $x_1, \dots, x_n$ and n defining relations: $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), where f_i are elements of the polynomial algebra $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. It is evident that the algebra P arbitrary chosen contains no zero divisors and can be realised by the derivation $D \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ on $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

The spectrum of this differential algebra coincides with the affine space $\mathbb{C}^n$. The estimate $|((D^m \times f)|_{x=M})/m!| \leq n^m a^{m+1}$ holds for all coefficients of the Taylor series $\tilde{\psi}_M(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (D^m \times f)|_{x_i=\alpha_i, \dots, x_n=\alpha_n} \cdot \frac{z^m}{m!}$ ($f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $M \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$), where a is the largest absolute value of the functions $f, f_1, \dots, f_n$ and all their partial derivatives at the point M . Consequently, all the power series $\tilde{\psi}_M(x_1), \dots, \tilde{\psi}_M(x_n)$ converge in some neighborhood of zero. The equality $\tilde{\psi}_M(f) = f(\tilde{\psi}_M(x_1), \dots, \tilde{\psi}_M(x_n))$ shows us that for any $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ the series $\tilde{\psi}(f)$ converges at the same neighborhood. Since any finitely generated commutative associative $\mathbb{C}$ -algebra A with a fixed derivation $D \in \text{Der}_{\mathbb{C}} A$ is a homomorphic image of the Picard algebra P for a suitable choice of n and $f_1, \dots, f_n$, the spectrum $\text{Spec}_{\mathbb{C}} A$ is also analytic for any $D \in \text{Der}_{\mathbb{C}} A$. That proves the corollary of Theorem 1.

2. “Rational” differential-algebraic parametrisations of flat affine irreducible algebraic curves. Denote by X_H a flat affine irreducible algebraic curve given by an equation $H(x, y) = 0$ ($H(x, y) \in k[x, y]$). Let $k[X_H]$ be k -algebra of regular functions of X_H over

²**Proof of the corollary of Theorem 1.**

algebraically closed field k ($\text{char } k = 0, 1, 2, \dots$). In sections 2.1-3, 3 we suppose that all differential k -algebras (“parametresations”) defined by differential algebraic relations are in a natural way to contain $k[X_H]$ as a k -subalgebra. Of course, it implies that the irreducible polynomial $H(x, y)$ does have additional properties. For once we point out the following exact and evident conditions

- a) $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$ in the sections 2.1, 2.3,
- б) $x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \notin k \cdot H(x, y)$ in section 2.2,
- в) $(\frac{\partial H}{\partial x})^2 + (\frac{\partial H}{\partial y})^2 \neq 0$ in section 3,

which are necessary and sufficient for embedding $k[X_H]$ in corresponding k -algebras given below.

2.1. Singly generated differential-algebraic curves (proof of Theorem 2). We determine a differential k -algebra with the identity element W_H by two generators ω, ω_1 and two defining relations $H(\omega, \omega_1) = 0, \omega' = \omega_1$, where $H(\omega, \omega_1)$ is an irreducible polynomial in $k[\omega, \omega_1]$, for which $\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \neq 0$. Unfortunately, it is currently unknown whether this commutative associative algebra contains zero divisors. To get rid of such kind of virtual elements (when $\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \neq 0$) we consider in W_H the differential ideal $I_H \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in W_H \mid \left(\frac{\partial H}{\partial \omega_1}\right)^m \cdot a = 0, m = m(a)\}$ and localize W_H by the element $d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial \omega_1} \in W_H$. Then the kernel of the canonical homomorphism of differential algebras $\nu : W_H \rightarrow (W_H)_d \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{b}{d^k} \mid b \in W_H\}$ coincides with the ideal I_H . Let $\bar{W}_H \stackrel{\text{def}}{=} \nu(W_H), \bar{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\omega), \bar{d} \stackrel{\text{def}}{=} \nu(d), \bar{\omega}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\omega_1), k[X_H] \stackrel{\text{def}}{=} k[\bar{\omega}, \bar{\omega}_1]$. Now from the equality $\bar{\omega}' = \bar{\omega}_1$ we conclude that $\bar{W}_H$ is differentially generated by one element $\bar{\omega}$, and the equality $0 = H' = \frac{\partial H}{\partial \omega} \omega' + \frac{\partial H}{\partial \omega_1} \omega''$ leads to the fact that under $\nu : W_H \rightarrow (W_H)_d$ all elements of $\nu(W_H) = \bar{W}_H$ lie in the commutative associative subalgebra generated by three elements $\omega, \omega_1, d^{-1} = (\omega_1 \cdot \frac{\partial H}{\partial \omega_1})^{-1}$.

Now we are in a position to realize $\bar{W}_H$ as a differential k -subalgebra in the field $k(X_H)$ with respect to the derivation $D \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1(\frac{\partial}{\partial \omega} - (\frac{\partial H}{\partial \omega} / \frac{\partial H}{\partial \omega_1}) \frac{\partial}{\partial \omega_1})$, where X_H is the flat irreducible affine algebraic curve given by equation $H(\omega, \omega_1) = 0$. Consequently, we get a chain of k -algebras $k[X_H] \subseteq \bar{W}_H \subseteq (\bar{W}_H)_d \subseteq k(X_H)$, which satisfies all the conditions of the lemma on affinity of intermediate subalgebra. It is evident that *any one generated differential subalgebra of an arbitrary integral domain (of transcendence degree 1) is a homomorphic image of $\bar{W}_H$ for an appropriate choice of $H(\omega, \omega_1)$ ($\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \neq 0$).* That proves Theorem 1 on affinity of differential-algebraic curves.

(Especially note that the above reasoning is true for all algebraically closed fields of positive characteristic p , because the equalities $\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \equiv 0, \frac{\partial H}{\partial \omega} \equiv 0$ imply another relation $H(\omega, \omega_1) = (F(\omega, \omega_1))^p$, which contradicts the irreducibility of H .)

We conclude the section by one not complicated (maybe whatnot, but memorable) version of Theorem 1.

Proposition 2. If in a differential domain of integrity F over an algebraically closed field k elements f and f' satisfy to a nonzero polynomial relation $H(f, f') = 0$ ($H(x, y) \in k[x, y], H \neq 0$), then there exists a natural number N , for which $f^{(N)} = G(f, f', f \dots, f^{(N-1)})$, where $G(x_1, x_2, \dots, x_N) \in k[x_1, x_2, \dots, x_N]$.

Corollary. If in a real interval (a, b) an infinitely differentiable complex valued function $f(t)$ is a solution of a differential equation $H(f, f') = 0$, where $H(x, y) \in \mathbf{C}[x, y]$, is a nonzero irreducible polynomial, then $f^{(N)}(t) = G(f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(N-1)}(t))$, where $G(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_N]$, for a sufficiently large natural number N .

2.2. Kepler parametrizations of flat curves. A differential k -algebra with the identity element G_H is given by generators x, y and two differential defining relations $H(x, y) = 0, xy' - x'y = \sigma$, where H is an irreducible polynomial in $k[x, y]$, for which $x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \notin k \cdot H(x, y)$

³, and $0 \neq \sigma \in k$ (for example, $\sigma = \hbar/m_e$). Solving the system of equations $0 = H' = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot y'$, $-yx' + xy' = \sigma$ with respect to x', y' , we get $\mathcal{L}(x, y) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} -\partial H/\partial y \\ \partial H/\partial x \end{pmatrix}$, where $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot y$. If the irreducible affine curve X_H (given by the equation $H(x, y) = 0$) is smooth, the ideal generated by $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}$ in $k[X_H]$ has to coincide with the algebra G_H . Thus $a\frac{\partial H}{\partial x} + b\frac{\partial H}{\partial y} = 1$ for appropriate a, b from $k[X_H]$. Consequently, $\mathcal{L} \cdot (-ax' + by') = \sigma$, i.e. the element $\mathcal{L}$ is invertible in G_H . It follows immediately that G_H (as a commutative associative k -algebra)

(a) is generated by its three elements: $x, y, \mathcal{L}^{-1}$;

(b) can be included into the field $k(X_H)$ and contains no zero divisors;

(c) is realized as a differential subalgebra in $k(X_H)$ with respect to the derivation $D_H \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \cdot \mathcal{L}^{-1}(-\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y})$.

In general it is possible that there exist zero divisors in G_H . Let I be an arbitrary differential ideal in G_H , for which G_H/I contains no zero divisors. If we assume that I intersects by more than just the zero element with the subalgebra $k[X_H]$ generated by x, y in G_H , then the algebra $k[X_H]/(I \cap k[X_H])$ be zero-dimensional, and the integral domain G_H/I should coincide with $k \cdot 1$, but it contradicts the statement $xy' - x'y = \sigma \neq 0$. If $I \cap k[X_H] = 0$, then the element $\mathcal{L} \in k[X_H]$ is not equal to zero in the integrity domain G_H/I and after localization by $\mathcal{L}$ we get $(G_H/I)_{\mathcal{L}} = (G_H)_{\mathcal{L}}/I_{\mathcal{L}}$. Consequently, the ideal I has to coincide with the ideal $I(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in G_H | \mathcal{L}^m \cdot a = 0 \text{ in } G_H, m = m(a)\}$. It proves that there exists the only integral domain $\bar{G}_H$, given by generators x, y and two differential defining relations $H(x, y) = 0$, $xy' - x'y = \sigma$ ($\sigma \in k, \sigma \neq 0$), for which the following statements are true:

(a) $\bar{G}_H$ is imbeded into $k(X_H)$ with respect to the derivation $D_H \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{-1} \cdot \sigma(-\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y})$;

(b) under this embedding $k[X_H] \subseteq \bar{G}_H \subseteq (\bar{G}_H)_{\mathcal{L}} \subset k(X_H)$ and as a commutative associative k -algebra the localization $(\bar{G}_H)_{\mathcal{L}}$ is generated by three elements $x, y, \mathcal{L}^{-1}$;

(c) $\bar{G}_H$ is a simple differential k -algebra and the signature derivation does not vanish at any point of the spectrum $\text{Spec}_k \bar{G}_H$.

Hereby (look also at Lemma on affinity of intermediate subalgebra), $X_{\bar{G}_H} = \text{Spec}_k \bar{G}_H$ is a smooth affine irreducible algebraic curve and $\bar{G}_H$ contains $k[X_H^{\nu}]$, where X_H^{ν} is a normalization of the curve X_H . So we see that the Kepler observer $\bar{G}_H$ excludes from his consideration all the non-linear branches of X_H^{ν} , and slightly moving off the origin, can notice all the linear ones.

This observer surveying the curve X_H can try to act more radically: run up along the line $x = 0$ from the origin to the gallery.

2.3 Puiseux parametrizations. Let us consider a differential k -algebra with the identity element P_H , given by generators x, y and two defining relations $H(x, y) = 0$, $x' = c$ ($c \in k$, $c \neq 0$), where $H(x, y)$ is an irreducible polynomial, for which $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$. The arguments presented in the previous two examples ensure that there exists a unique (possibly zero) differential ideal (equal to $I \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in P_H | \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^m \cdot a = 0, m = m(a)\}$) such as the quotient algebra with respect to that ideal contains no zero divisors. Denote this quotient algebra throw $\bar{P}_H$. The equality $0 = H' = \frac{\partial H}{\partial x}c + \frac{\partial H}{\partial y}y'$ shows us that the localization $\bar{P}_H$ with respect to the element $\frac{\partial H}{\partial y}$ is generated as a commutative associative k -algebra by its three elements $x, y, \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^{-1}$, and

³If $H = H_0 + H_1 + \dots + H_m$, where $H_0, H_1, \dots, H_m$, are homogeneous components of the polynomial $H(x, y)$ then $x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \cdot H_0 + 1 \cdot H_1 + \dots + m \cdot H_m$ and in the case, when $\text{char } k = 0$, the inclusion $x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \in k \cdot H(x, y)$ is true for homogeneous $H(x, y)$ only. But an arbitrary irreducible homogeneous polynomial has degree 1. Hence, $H(x, y) = H_1$ and the equation $H(x, y) = 0$ defines a strait line, which contains the origin.

$\bar{P}_H$ is realized as a differential subalgebra in the field $k(X_H)$ with respect to the derivation $D = D(H) = c \left(\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\partial H}{\partial x} / \frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Then $k[X_H] \subset \bar{P}_H \subseteq (\bar{P}_H)^{\frac{\partial H}{\partial y}} \subset k(X_H)$, and in the view of uniqueness of the ideal I the differential k -algebra $\bar{P}_H$ does not vanish at any point of $\text{Spec}_k \bar{P}_H$ and in the same way as in the previous example $X_{\bar{P}_H} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_k \bar{P}_H$ is a smooth affine irreducible algebraic curve, for which $k[X_{\bar{P}_H}] = \bar{P}_H$ contains $k[X_H^\nu]$, where X_H^ν - is a normalization of the flat curve X_H . Wherein $\bar{P}_H$ excludes from its consideration those branches of the curve X_H^ν , for which their projections of the tangents on the plane Oxy are parallel to the line $x = 0$. (Non-linear branches are excluded, too).

2.4. Common case: $\left(D = \frac{P}{Q} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) : k(X_H) \rightarrow k(X_H)$ is treated similarly 2.1 - 2.3.

3. Fermat parametrizations (natural parameter). Let us consider a differential k -algebra with the identity element F_H determined by generators x, y and two defining relations $H(x, y) = 0, (x')^2 + (y')^2 = c^2$ ($\text{char } k \neq 2, 0 \neq c \in k$), where $H(x, y)$ is an irreducible polynomial in $k[x, y]$, for which $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \neq 0$. It is obvious that signature derivation does not vanish at any point of the spectrum $\text{Spec}_k F_H$ of the k -algebra F_H , thus if we show that any homomorphic image $\bar{F}_H$ of the algebra F_H without zero divisors is of transcendence degree 1 over k , then $\bar{F}_H$ will turn up to be a simple finitely generated differential k -algebra with an analytic spectrum. Let $\phi : F_H \rightarrow \bar{F}_H$ be the corresponding epimorphism, $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x), \bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(y)$, $k[X_H]$ the algebra of regular functions of the flat affine curve X_H given by the equation $H(x, y) = 0$. It is clear ⁴ that $k[X_H]$ is isomorphic to the k -subalgebra, generated by x, y in F_H and $k[X_H] \cap \text{Ker } \phi = 0$ (otherwise the zero-dimensional subalgebra $\phi(k[X_H])$ would generate $\bar{F}_H$ and $\bar{x}', \bar{y}'$ should be equal to zero, but this contradicts with the equality $(x')^2 + (y')^2 = c^2 \neq 0$). Equalities $\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0$ are possible if $\text{char } k = p > 0$, but due to the fact that $H(x, y)$ is irreducible, either $\frac{\partial H}{\partial x} \neq 0$, or $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$.

We consider the case when $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$. Then $d \stackrel{\text{def}}{=} \phi \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)$ is a nonzero element in the integral domain $\bar{F}_H$ and from the equalities $0 = \phi(H') = \phi \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \bar{x}' + \phi \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \bar{y}'$, $(\bar{x}')^2 + (\bar{y}')^2 = c^2$ we get that $\bar{y}' = -(\phi \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) / d) \bar{x}'$, $(\bar{x}')^2 (1 + (\phi \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) / d)^2) = c^2$ in the quotient field $Q(\bar{F}_H)$ of the algebra $\bar{F}_H$. The last relation implies that

- (a) the k -subalgebra E generated by $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}'$ is contained in the “quadratic extension” of the field $\phi(k(X_H))$;
- (b) $\bar{x}^{(i)}, \bar{y}^{(i)} \in Q(E) (i = 2, 3, \dots)$.

These properties prove that the integral domain $\bar{F}_H$ is contained in $Q(E)$ and $\deg_k \bar{F}_H = \deg_k Q(E) = 1$. By Theorem 1, the commutative associative k -algebra $\bar{F}_H$ is finitely generated and finitely presented as a differential k -algebra. As the signature derivation $'$ does not vanish at any point of $X_{\bar{F}_H} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_k \bar{F}_H$, $\bar{F}_H$ is an integrally closed k -algebra and $\bar{F}_H$ contains $k[X_H^\nu]$, where X_H^ν is the normalization of the curve X_H .

4. Nonaffine differential-algebraic surfaces exist. Let a differential $\mathbb{C}$ -algebra E (with the identity element) be given by generators x, y and two defining relations $x' = 1, x^2 y' + y - x = 0$. Assume that $\bar{x}(z) \stackrel{\text{def}}{=} z, \bar{y}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! \cdot z^{(m+1)}$ and generate a differential $\mathbb{C}$ -subalgebra $\bar{E}$ by $\bar{x}, \bar{y}$ in power series $\mathbb{C}[[z]]$ with respect to the derivation $\frac{d}{dz}$. Direct verification shows that

⁴ The equality $H(x, y) = 0$ implies the relation $0 = H = x' \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$, in particular, $x'^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 = y'^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2$ and taking into consideration the equality $x'^2 + y'^2 = c^2$ we have that $x'^2 \cdot \Delta = c^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2, y'^2 \cdot \Delta = c^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2$. As soon as $\Delta \neq 0$ and $\Delta = \left(\frac{\partial H}{\partial x} + (-1)^{1/2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - (-1)^{1/2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right)$, the irreducible polynomial $H(x, y)$ does not divide the Δ , i.e. $\Delta \neq 0$ in $k[X_H]$ and $(\bar{x}')^2, (\bar{y}')^2 \in k[X_H]_\Delta \subset k(X_H)$.

$\frac{d\bar{x}}{dz} = 1$, $\bar{x}^2 \frac{d\bar{y}}{dz} + \bar{y} - \bar{x} = 0$ in $\mathbb{C}[[z]]$. Thus, the integral domain $\bar{E}$ is a homomorphic image of E at $\phi : E \rightarrow \bar{E}$ ($\phi(x) = \bar{x}$, $\phi(y) = \bar{y}$) and we consistently get

(a) $\text{Ker}\phi = \{a \in E \mid x^{2m} \cdot a = 0 \text{ } (m = m(a))\}$,

(b) for the maximal ideal $M \in \text{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$, which is the intersection of $\bar{E}$ with the unique maximal ideal of $\mathbb{C}[[z]]$, under the Taylor homomorphism $\tilde{\psi}_M : \bar{E} \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ we get $\tilde{\psi}_M(\bar{x}) = \bar{x}$, $\tilde{\psi}_M(\bar{y}) = \bar{y}$, i.e. $\text{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$ is not analytic at the point M ;

(c) $\bar{x}, \bar{y}$ are algebraically independent over $\mathbb{C}$ (otherwise $\bar{E}$ would coincide with some Puiseux parametrization $\bar{P}_H$ ($H(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$) and $\text{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$ would be analytic);

(d) $\bar{E}$ can be realized in the field of rational functions $\mathbb{C}(x, y)$ as a differential $\mathbb{C}$ -subalgebra with respect to the derivation $D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x-y}{x^2} \frac{\partial}{\partial y}$.

In this way the differential integral domain $\bar{E}$ has transcendence degree equal to 2 over $\mathbb{C}$, its spectrum of maximal ideals is not analytic and, consequently, (as a commutative associative $\mathbb{C}$ -algebra) $\bar{E}$ cannot be finitely generated.

We leave it as an exercise for the reader to verify two more properties of the $\mathbb{C}$ -algebra $\bar{E}$:

(e) $\mathbb{C}[x, y] \subset \bar{E} \subset \mathbb{C}[x, y, x^{-1}] \subset \mathbb{C}(x, y)$;

(f) $\bar{E}$ is a simple differential $\mathbb{C}$ -algebra.

5. Proof of Theorem 2. An arbitrary k -subalgebra C of the finitely generated algebra $k[X]$ is countably dimensional. If C contains the identity element of $k[X]$, then we can choose a basis $\{e_i \mid i = 0, 1, \dots\}$ in C , where $e_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Let $C_0 \stackrel{\text{def}}{=} k \cdot e_0$, $C_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} C_i[e_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). As soon as the field k is algebraically closed, the k -algebra C_1 is isomorphic to the polynomial algebra $k[e_1]$. Let us consider an ascending chain of quotient fields $Q(C_i)$ of k -algebras C_i . By virtue of the fact that $k[X]$ is finitely generated and $\deg_k k(X) = 1$, the field $k(X)$ is a finite extension of the field $Q(C_1)$ and $\dim_{Q(C_1)} Q(C_i) \leq \dim_{Q(C_1)} Q(C_{i+1}) \leq \dim_{Q(C_1)} k(X)$. Consequently, the ascending chain of fields $Q(C_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) is stabilized for a sufficiently large integer N , i.e. $Q(C_N) = Q(C_{N+i})$ ($i = 1, 2, \dots$). Let $A \stackrel{\text{def}}{=} C_N$, then $Q(A) = Q(C) \subseteq k(X)$. Embedding $A \subset k[X]$ defines a natural regular map $\nu : X \rightarrow X_A \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_k A$. As soon as $\deg_k k(X) = 1$, the set $X_A \setminus \nu(X)$ is finite and X_A contains a finite number of singularities. Thus, in the k -algebra A we can choose an element d , for which the following statements are true

(a) the localization $A_d \stackrel{\text{def}}{=} A[d^{-1}] \subset Q(A)$ of the algebra A with respect to the element d is an integrally closed k -algebra;

(b) the localization $(k[X])_d$ is composed by all the algebraic elements over A_d and any ideal from $\text{Spec}_k A_d$ can be raised to an ideal from $\text{Spec}_k (k[X])_d$, in particular, to an ideal from $\text{Spec}_k (C_{N+i})_d$.

By Proposition 1, where $F = A_d, G = (C_{N+i})_d$, we conclude that $A_d = (C_{N+i})_d = C_d$ and we have a chain of subalgebras $A \stackrel{\text{def}}{=} C_N \subseteq C \subseteq B \stackrel{\text{def}}{=} A_d = (C_{N+i})_d \subseteq Q(A)$ satisfying all the conditions of Lemma on affinity of intermediate subalgebra. It completes the proof of Theorem 2 in the case when the k -subalgebra C contains the identity element of $k[X]$.

Otherwise, we consider the k -subalgebra $C_{\text{id}} \stackrel{\text{def}}{=} k \cdot 1 \oplus C$, which, as proved above, is generated by a finite subset of its elements: $e_i = \lambda_i \cdot 1 \oplus c_i$ ($i = 1, \dots, m$, $m = m(C)$, $c_i \in C$, $\lambda_i \in k$). But then $c_1, \dots, c_m \in C$ generate C . Theorem 2 is completely proved.

Bibliography

1. I.R. Shavarevich *Basic Algebraic Geometry*, Springer, 1994.
2. O.V. Gerasimova, G.A. Pogudin, Yu.P. Razmyslov, *Rolling simplexes and their commensurability, III (Capelli identities and their application to differential algebras)*, Fundamental and applied mathematics, volume 19, number 6, 2014, pages 7-24.

Аффинное очарование любой дифференциально-алгебраической кривой. (О параметризациях Кеплера, Пюизо и Ферма.)

Master Key

Аннотация. Сей текст, одновременно, и алгебраический ликбез, и картезианский мастер-класс (мессидж, так сказать) для ньютонов, платонов и их последователей. В нем, в частности, излагается, почему у счетномерной дифференциальной $\mathbf{C}$ -алгебры A без делителей нуля степени трансцендентности 1

спектр максимальных идеалов $\text{Spec}_{\mathbf{C}} A$ локально аналитичен, т.е. для любого $\mathbf{C}$ -гомоморфизма $\psi_M : A \rightarrow \mathbf{C}$

($M \in \text{Spec}_{\mathbf{C}} A$) и $a \in A$ ряд Тейлора $\tilde{\psi}_M(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_M(a^{(m)}) \frac{z^m}{m!}$ имеет ненулевой радиус сходимости, зависящий от элемента $a \in A$.

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, аффинная кривая, параметризация, степенные ряды, аналитичность.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность Игорю Ростиславовичу Шафаревичу за его неизменный интерес к результатам наших исследований и поддержку в работе.

*“Мы - реалисты, а не мистики,
И в дифурах нам равных нет.
Алгебраисты мы, не физики,
Мозги - наш главный инструмент!”
Из манифеста ЛВМ.*

Начнем с одного интуиционистского, чисто алгебраического трюка, позволяющего разрешать некоторые типы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно входящей в них старшей производной.

Лемма об аффинности промежуточной подалгебры. Пусть конечно порожденная коммутативно-ассоциативная область целостности A является алгеброй (с единицей) над произвольным алгебраически замкнутым полем k ($\text{char} k = 0, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots$), а ее поле частных $Q(A)$ имеет над k степень трансцендентности, равную 1. Тогда если в цепочке k -подалгебр $A \subseteq C \subseteq B \subset Q(A)$ алгебры A и B содержат конечное число образующих, то это верно и для подалгебры C .

Доказательство. Так как B имеет конечное число образующих, то C -счетномерная k -алгебра. Выберем в C элементы $\{e_i | i = 1, 2, \dots\}$ так, чтобы они дополняли базис k -алгебры A до базиса C . Положим $C_0 \stackrel{\text{def}}{=} A$, $C_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} C_i[e_{i+1}]$, $C_\infty \stackrel{\text{def}}{=} B$. Целые замыкания (“нормализации”) всех этих конечно порожденных подалгебр в $Q(A)$ будем обозначать $\bar{C}_0, \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_i, \dots, \bar{C}_\infty$, соответственно. Общеизвестно, что каждая такая подалгебра имеет над k конечное число образующих. Более того, в ходе доказательства этого факта устанавливается (см.[1]), что $\bar{C}_i$ как модуль над C_i конечно порожден и, следовательно, нетеров. Покажем, что возрастающие цепочки k -подалгебр $\{\bar{C}_i\}, \{C_i\} (i = 1, 2, 3, \dots)$ стабилизируются.

Предложение 1. Если в цепочке областей целостности $F \subseteq G \subset Q(F)$ k -подалгебры F и G имеют конечное число образующих, $F = \bar{F}$ (т.е. F -целозамкнута), $\deg_k Q(F) = 1$, то для естественного отображения $\nu : \text{Spec}_k G \rightarrow \text{Spec}_k F$ выполняются следующие свойства:

а) ν - инъективное отображение,

- б) если ν сюръективно, то G совпадает с F ,
 в) $(\text{Срес}_k F) \setminus \nu(\text{Срес}_k G)$ - конечное множество.

Это есть точный перевод на язык коммутативной алгебры утверждения следствия 2 теоремы 2 из параграфа 2 главы 2 монографии [1] (см. стр. 136).

Из свойства б) заключаем, что если $\bar{C}_i \neq \bar{C}_{i+1}$, то некоторый максимальный идеал $M \in \text{Срес}_k \bar{C}_i$ не поднимается до идеала в $\text{Срес}_k \bar{C}_{i+1}$, а тогда из свойства а) вытекает, что $M \cap \bar{C}_0 \in \text{Срес}_k \bar{C}_0$ не поднимается до идеала в $\text{Срес}_k \bar{C}_\infty$. Но в $\bar{C}_0$ в силу свойства в) конечное число максимальных идеалов, которые не поднимаются до идеала в $\text{Срес}_k \bar{C}_\infty$. Следовательно, в возрастающей цепочке “нормализаций” $\bar{C}_0 \subseteq \bar{C}_1 \subseteq \dots \bar{C}_m \subseteq \dots$ лишь конечное число мест, где включения строгие, то есть $\bar{C}_N = \bar{C}_{N+i}$ для достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ ($i = 1, 2, \dots$) и $C_N \subseteq C = \bigcup_m C_m \subseteq \bar{C}_N$. Но как было отмечено выше $\bar{C}_N$ как модуль над C_N нетеров. Поэтому его C_N^m -подмодуль C конечно порожден и должен совпадать с C_{N+q} для некоторого $q \in \mathbb{N}$, что доказывает лемму.

Отсюда без труда выводятся следующие утверждения.

Теорема 1. Любая конечно порожденная дифференциальная k -алгебра без делителей нуля и степени трансцендентности 1 имеет конечное число образующих, как коммутативно-ассоциативная алгебра, в частности эта дифференциальная k -алгебра конечно определена.

Следствие. Спектр максимальных идеалов $\text{Срес}_{\mathbb{C}} A$ произвольной конечно порожденной дифференциальной коммутативно-ассоциативной $\mathbb{C}$ -алгебры A без делителей нуля степени трансцендентности 1 аналитичен, т.е. для любого $\mathbb{C}$ -гомоморфизма $\psi_M : A \rightarrow \mathbb{C}$ ($M \in \text{Срес}_{\mathbb{C}} A$) при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M : A \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ ($\tilde{\psi}_M(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_M(a^{(m)}) \frac{z^m}{m!}$) все степенные ряды сходятся в некоторой окрестности нуля.

Теорема 2. Пусть X -неприводимая аффинная алгебраическая кривая над алгебраически замкнутым полем k , а $k[X]$ - ее алгебра регулярных функций. Тогда любая k -подалгебра в $k[X]$ порождается конечным числом своих элементов.

Следствие. Пусть поле K имеет степень трансцендентности 1 над алгебраически замкнутым полем k , а $\text{Der}_k K$ - алгебра Ли всех k -дифференцирований $K \rightarrow K$. Тогда для любых $a_1, \dots, a_n \in K$, $D_1, \dots, D_l \in \text{Der}_k K$ наименьшая коммутативно-ассоциативная k -подалгебра A в K , для которой $a_1, \dots, a_m \in A$ и $D_i(A) \subset A$ ($i = 1, \dots, l$), конечно порождена.

Проиллюстрируем сказанное конкретными примерами.

1. Дифференциальные алгебры Пикара (см. [2]).⁵ Зададим дифференциальную $\mathbb{C}$ -алгебру P образующими $x_1, \dots, x_n$ и n определяющими соотношениями: $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где все f_i - произвольные фиксированные элементы алгебры многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Очевидно, что эта алгебра не имеет делителей нуля и P можно реализовать на $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, взяв в качестве дифференцирования $D \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Спектр этой дифференциальной алгебры совпадает с аффинным пространством $\mathbb{C}^n$. Для коэффициентов ряда Тейлора $\tilde{\psi}_M(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (D^m \times f)|_{x_i=\alpha_i, \dots, x_n=\alpha_n} \cdot \frac{z^m}{m!}$ ($f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $M \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$) мгновенно выводится оценка $|((D^m \times f)|_{x=M})/m!| \leq n^m a^{m+1}$, где a -максимум модуля значений функций $f, f_1, \dots, f_n$ и всех их частных производных произвольного порядка в точке M . Следовательно, все степенные ряды $\tilde{\psi}_M(x_1), \dots, \tilde{\psi}_M(x_n)$ сходятся в некоторой окрестности нуля. Равенство $\tilde{\psi}_M(f) = f(\tilde{\psi}_M(x_1), \dots, \tilde{\psi}_M(x_n))$ показывает, что для любого $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ряд $\tilde{\psi}(f)$ сходится

⁵ Доказательство следствия теоремы 1.

в той же окрестности. Так как любая конечно порожденная коммутативно-ассоциативная $\mathbb{C}$ -алгебра A с фиксированным дифференцированием $D \in \text{Der}_{\mathbb{C}} A$ является гомоморфным образом алгебры Пикара P при подходящем выборе n и $f_1, \dots, f_n$, то $\text{Spec}_{\mathbb{C}} A$ также аналитичен для любого $D \in \text{Der}_{\mathbb{C}} A$. Это доказывает следствие теоремы 1.

2. “Рациональные” дифференциально-алгебраические параметризации плоских аффинных неприводимых алгебраических кривых. Обозначим X_H плоскую аффинную неприводимую алгебраическую кривую, заданную уравнением $H(x, y) = 0$ ($H(x, y) \in k[x, y]$). Пусть $k[X_H]$ - ее алгебра регулярных функций над алгебраически замкнутым полем k произвольной характеристики. В рубриках 2.1-3, 3 нами предполагается, что задаваемые в них дифференциально-алгебраическими соотношениями дифференциальные k -алгебры (“параметризации”) естественным образом содержат $k[X_H]$ в качестве подалгебры. Разумеется, это должно накладывать некоторые ограничения на неприводимый многочлен $H(x, y)$. Сразу явно укажем для каждого из этих случаев необходимые и достаточные условия, обеспечивающие такое включение:

- а) $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$ в рубриках 2.1, 2.3,
- б) $x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \notin k \cdot H(x, y)$ в рубрике 2.2,
- в) $(\frac{\partial H}{\partial x})^2 + (\frac{\partial H}{\partial y})^2 \neq 0$ в рубрике 3.

2.1. Однопорожденные дифференциально-алгебраические кривые (доказательство теоремы 1). Зададим дифференциальную k -алгебру с единицей W_H двумя образующими ω, ω_1 и двумя определяющими соотношениями $H(\omega, \omega_1) = 0, \omega' = \omega_1$, где $H(\omega, \omega_1)$ - неприводимый многочлен в $k[\omega, \omega_1]$, для которого $\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \neq 0$. К сожалению, в данный момент не известно содержит ли эта коммутативно-ассоциативная алгебра делители нуля. Чтобы избавиться (при $\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \neq 0$) от такого рода виртуальных элементов, рассмотрим в W_H дифференциальный идеал $I_H \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in W_H \mid \left(\frac{\partial H}{\partial \omega_1}\right)^m \cdot a = 0, m = m(a)\}$ и пролокализуем W_H по элементу $d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial \omega_1} \in W_H$. Тогда ядро канонического гомоморфизма дифференциальных алгебр $\nu : W_H \rightarrow (W_H)_d \stackrel{\text{def}}{=} \{ \frac{b}{d^k} \mid b \in W_H \}$ совпадает с идеалом I_H . Положим $\bar{W}_H \stackrel{\text{def}}{=} \nu(W_H)$, $\bar{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\omega)$, $\bar{d} \stackrel{\text{def}}{=} \nu(d)$, $\bar{\omega}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\omega_1)$, $k[X_H] \stackrel{\text{def}}{=} k[\bar{\omega}, \bar{\omega}_1]$. Тогда из равенства $\bar{\omega}' = \bar{\omega}_1$ вытекает, что $\bar{W}_H$ дифференциально порождается одним элементом $\bar{\omega}$, а из равенства $0 = H' = \frac{\partial H}{\partial \omega} \omega' + \frac{\partial H}{\partial \omega_1} \omega''$ заключаем, что при $\nu : W_H \rightarrow (W_H)_d$ все элементы $\nu(W_H) = \bar{W}_H$ лежат в коммутативно-ассоциативной подалгебре $(W_H)_d$, порожденной тремя элементами $\omega, \omega_1, d^{-1} = (\frac{\partial H}{\partial \omega_1})^{-1}$.

Это позволяет реализовать $\bar{W}_H$ как дифференциальную k -подалгебру в поле $k(X_H)$, где X_H плоская неприводимая аффинная алгебраическая кривая, заданная уравнением $H(\omega, \omega_1) = 0$ ($\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \neq 0$), взяв в качестве дифференцирования $D \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 \left(\frac{\partial}{\partial \omega} - \left(\frac{\partial H}{\partial \omega} / \frac{\partial H}{\partial \omega_1} \right) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)$.

Следовательно, мы получаем цепочку k -алгебр $k[X_H] \subseteq \bar{W}_H \subseteq (\bar{W}_H)_{\bar{d}} \subseteq k(X_H)$, удовлетворяющую всем условиям леммы об аффинности промежуточной подалгебры и $\bar{W}_H$ конечно порождена. Очевидно, что *любая однопорожденная дифференциальная подалгебра в произвольной дифференциальной области целостности (степени трансцендентности равной единице) является гомоморфным образом $\bar{W}_H$ при подходящем выборе $H(\omega, \omega_1)$ ($\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \neq 0$).* Это доказывает теорему 1 об аффинности дифференциально-алгебраических кривых.

(Особо отметим, что проведенное рассуждение справедливо и над полями положительной характеристики p , так как из равенств $\frac{\partial H}{\partial \omega_1} \equiv 0, \frac{\partial H}{\partial \omega} \equiv 0$ следует, что $H(\omega, \omega_1) = (F(\omega, \omega_1))^p$, а это противоречит неприводимости H .)

Завершим эту рубрику одной незамысловатой (возможно никчёмной, но запоминающейся) версией теоремы 1.

Предложение 2. Если в дифференциальной области целостности F над алгебраически замкнутым полем k элементы f и f' связаны некоторым ненулевым полиномиальным соотношением $H(f, f') = 0$ ($H(x, y) \in k[x, y]$, $H \neq 0$), то для некоторого натурального числа N " N -я производная" $f^{(N)}$ полиномиально выражается через предыдущие $f, f', f'', \dots, f^{(N-1)}$.

Следствие. Если на действительном интервале (a, b) бесконечно дифференцируемая комплекснозначная функция $f(t)$ является решением дифференциального уравнения $H(f, f') = 0$, где $H(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ - неприводимый (ненулевой) полином, то для некоторого натурального числа N функция $f^{(N)}(t)$ полиномиально выражается через $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(N-1)}(t)$.

2.2. Кеплеровы параметризации плоской кривой. Зададим дифференциальную k -алгебру с единицей G_H образующими x, y и двумя дифференциальными определяющими соотношениями $H(x, y) = 0$, $xy' - x'y = \sigma$, где H - неприводимый многочлен в $k[x, y]$, для которого $x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \notin k \cdot H(x, y)$ ⁶, а $0 \neq \sigma \in k$ (например, $\sigma = \hbar/m_e$). Разрешая систему уравнений $0 = H' = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot y'$, $-yx' + xy' = \sigma$ относительно x', y' , получаем $\mathcal{L}(x, y) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} -\partial H / \partial y \\ \partial H / \partial x \end{pmatrix}$, где $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot y$. Если неприводимая аффинная кривая X_H (заданная уравнением $H(x, y) = 0$) является гладкой, то идеал, порожденный $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}$ в $k[X_H]$ должен совпадать со всей алгеброй. Поэтому $a \frac{\partial H}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial y} = 1$ для некоторых a, b из $k[X_H]$. Следовательно, $\mathcal{L} \cdot (-ax' + by') = \sigma$, т.е. элемент $\mathcal{L}$ обратим в G_H . Отсюда немедленно следует, что G_H (как коммутативно-ассоциативная k -алгебра)

- а) порождается своими тремя элементами: $x, y, \mathcal{L}^{-1}$;
- б) вкладывается в поле $k(X_H)$ и не содержит делителей нуля;
- в) реализуется как дифференциальная подалгебра в $k(X_H)$ относительно дифференцирования $D_H \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(-\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

В общем случае не исключено, что в G_H существуют делители нуля. Пусть I - произвольный дифференциальный идеал в G_H , для которого G_H/I не имеет таких элементов. Допустим, что I пересекается с подалгеброй $k[X_H]$, порожденной x, y в G_H ненулевым образом, тогда фактор-алгебра $k[X_H]/(I \cap k[X_H])$ нульмерна и область целостности G_H/I должна совпадать с $k \cdot 1$, а это противоречит тому, что $xy' - x'y = \sigma \neq 0$. Если же $I \cap k[X_H] = 0$, то элемент $\mathcal{L} \in k[X_H]$ не равен нулю в области целостности G_H/I и, локализуя по $\mathcal{L}$, получаем $(G_H/I)_{\mathcal{L}} = (G_H)_{\mathcal{L}}/I_{\mathcal{L}}$. Следовательно, идеал I должен совпадать с идеалом $I(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in G_H \mid \mathcal{L}^m \cdot a = 0 \text{ в } G_H, m = m(a)\}$. Это доказывает, что существует единственная область целостности $\bar{G}_H$, заданная образующими x, y и двумя дифференциальными соотношениями $H(x, y) = 0$, $xy' - x'y = \sigma$ ($\sigma \in k, \sigma \neq 0, \mathcal{L} \notin k \cdot H(x, y)$) для которой выполняются свойства:

- а) $\bar{G}_H$ вкладывается в $k(X_H)$ относительно дифференцирования $D_H \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{-1} \cdot \sigma \left(-\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)$;
- б) при этом вложении $k[X_H] \subseteq \bar{G}_H \subseteq (\bar{G}_H)_{\mathcal{L}} \subset k(X_H)$ и локализация $(\bar{G}_H)_{\mathcal{L}}$, как коммутативно-ассоциативная k -алгебра порождается тремя своими элементами $x, y, \mathcal{L}^{-1}$;
- в) $\bar{G}_H$ - простая дифференциальная k -алгебра и сигнатурное дифференцирование не исчезает ни в одной точке спектра $\text{Spec}_k \bar{G}_H$.

⁶ Если $H = H_0 + H_1 + \dots + H_m$ - разложение полинома $H(x, y)$ на его однородные компоненты, то $x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \cdot H_0 + 1 \cdot H_1 + \dots + m \cdot H_m$ и для случая нулевой характеристики основного поля включение $x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \in k \cdot H(x, y)$ возможно только для однородного многочлена $H(x, y)$. Но из неприводимости H вытекает, что тогда $H(x, y) = H_1$, т.е. уравнение $H(x, y) = 0$ задает прямую, проходящую через начало координат.

Таким образом, $X_{\bar{G}_H} = \text{Spec}_k \bar{G}_H$ - это гладкая аффинная неприводимая алгебраическая кривая и $\bar{G}_H$ содержит $k[X_H^\nu]$, где X_H^ν - нормализация кривой X_H . Это показывает что кеплеров наблюдатель $\bar{G}_H$ исключает из рассмотрения все нелинейчатые ветви X_H^ν , а немного сдвинувшись из начала координат может заметить все линейчатые.

Такой наблюдатель способен, обозревая кривую X_H , поступить более радикально: избежать из начала координат по прямой $x = 0$ на галёрку.

2.3 Параметризации Пюизо. Рассмотрим дифференциальную k -алгебру с единицей P_H , заданную образующими x, y и двумя дифференциальными соотношениями $H(x, y) = 0$, $x' = c$ ($c \in k, c \neq 0$), где $H(x, y)$ - неприводимый многочлен, для которого $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$. Аргументы, приведенные в предыдущих двух примерах, гарантируют, что в P_H существует единственный (возможно нулевой) дифференциальный идеал $I \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in P_H \mid \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^m \cdot a = 0, m = m(a)\}$, фактор-алгебра по которому не содержит делителей нуля. Обозначим ее $\bar{P}_H$. Равенство $0 = H' = \frac{\partial H}{\partial x}c + \frac{\partial H}{\partial y}y'$ показывает, что локализация $\bar{P}_H$ по элементу $\frac{\partial H}{\partial y}$ порождается как коммутативно-ассоциативная k -алгебра тремя своими элементами $x, y, \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^{-1}$, а $\bar{P}_H$ реализуется как дифференциальная подалгебра в поле $k(X_H)$ относительно дифференцирования $D = D(H) = c \left(\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\partial H}{\partial x} / \frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Тогда $k[X_H] \subset \bar{P}_H \subseteq (\bar{P}_H)_{\frac{\partial H}{\partial y}} \subset k(X_H)$, а в силу единственности идеала I дифференциальная k -алгебра $\bar{P}_H$ не исчезает ни в одной точке $\text{Spec}_k \bar{P}_H$ и так же, как и в предыдущем примере $X_{\bar{P}_H} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_k \bar{P}_H$ - это гладкая аффинная неприводимая алгебраическая кривая, для которой $k[X_{\bar{P}_H}] = \bar{P}_H$ содержит $k[X_H^\nu]$, где X_H^ν - нормализация плоской кривой X_H . При этом $\bar{P}_H$ исключает из рассмотрения те ветви кривой X_H^ν , для которых проекция касательной на плоскость Oxy параллельна прямой $x = 0$ (включая и нелинейчатые ветви).

2.4. Общий случай: $\left(D = \frac{P}{Q} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) : k(X_H) \rightarrow k(X_H)$ рассматривается аналогично 2.1 - 2.3.

3. Параметризации Ферма (натуральный параметр). Зададим дифференциальную k -алгебру с единицей F_H образующими x, y и двумя определяющими соотношениями $H(x, y) = 0$, $(x')^2 + (y')^2 = c^2$ ($\text{char } k \neq 2, 0 \neq c \in k$), где $H(x, y)$ - неприводимый полином, для которого $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 \neq 0$. Очевидно, что сигнатурное дифференцирование не исчезает ни в одной точке спектра $\text{Spec}_k F_H$ k -алгебры F_H , поэтому если мы покажем, что любой гомоморфный образ $\bar{F}_H$ алгебры F_H , не содержащий делителей нуля, имеет над k степень трансцендентности равную 1, то $\bar{F}_H$ окажется простой конечно определенной дифференциальной k -алгеброй с аналитическим спектром. Пусть $\phi : F_H \rightarrow \bar{F}_H$ - соответствующий эпиморфизм и $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x), \bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(y)$, $k[X_H]$ -алгебра регулярных функций плоской аффинной кривой X_H , заданной уравнением $H(x, y) = 0$. Ясно, ⁷ что $k[X_H]$ изоморфна k -подалгебре, порожденной x, y в F_H и $k[X_H] \cap \text{Ker } \phi = 0$ (в противном случае нульмерная подалгебра $\phi(k[X_H])$ порождала бы $\bar{F}_H$ и $\bar{x}', \bar{y}'$ должны были быть равными нулю, а это противоречит равенству $(x')^2 + (y')^2 = c^2 \neq 0$). Равенства $\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0$, возможны, если $\text{char } k = p > 0$, но в силу неприводимости $H(x, y)$ либо $\frac{\partial H}{\partial x} \neq 0$, либо $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$. Тогда $d \stackrel{\text{def}}{=} \phi \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)$ - ненулевой элемент в области целостности $\bar{F}_H$ и из равенств $0 = \phi(H') = \phi \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \bar{x}' + \phi \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \bar{y}'$ и $(\bar{x}')^2 + (\bar{y}')^2 = c^2$ получаем,

⁷ Непосредственно проверяется, что равенство $H(x, y) = 0$ влечет $0 = H = x' \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$, в частности, $x'^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 = y'^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2$. Откуда, учитывая соотношение $x'^2 + y'^2 = c^2$, следует, что $x'^2 \cdot \Delta = c^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2, y'^2 \cdot \Delta = c^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2$. Так как $\Delta \neq 0$, то из равенства $\Delta = \left(\frac{\partial H}{\partial x} + (-1)^{1/2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - (-1)^{1/2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right)$ вытекает, что многочлен Δ не делится на $H(x, y)$, то есть $\Delta \neq 0$ в $k[X_H]$ и $(\bar{x}')^2, (\bar{y}')^2 \in k[X_H]_\Delta \subset k(X_H)$.

что $\bar{y}' = -(\phi(\frac{\partial H}{\partial x})/d)\bar{x}'$, $(\bar{x}')^2(1 + (\phi(\frac{\partial H}{\partial x})/d)^2) = c^2$ в поле частных $Q(\bar{F}_H)$ алгебры $\bar{F}_H$. Из последнего соотношения следует, что

- а) k -подалгебра E , порожденная $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ содержится в “квадратичном расширении” поля $\phi(k(X_H))$;
- б) $\bar{x}^{(i)}, \bar{y}^{(i)} \in Q(E) (i = 2, 3, \dots)$.

Это доказывает, что область целостности $\bar{F}_H$ содержится в $Q(E)$ и $\deg_k \bar{F}_H = \deg_k Q(E) = 1$. По теореме 1 коммутативно-ассоциативная k -алгебра $\bar{F}_H$ порождается конечным числом своих элементов и конечно определена как дифференциальная k -алгебра. Так как сигнатурное дифференцирование $'$ не исчезает ни в одной точке $X_{\bar{F}_H} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_k \bar{F}_H$, то $\bar{F}_H$ - целозамкнутая k -алгебра и $\bar{F}_H$ содержит $k[X_H^\nu]$, где X_H^ν - нормализация кривой X_H .

4. Неаффинные дифференциально-алгебраические поверхности существуют. Зададим дифференциальную $\mathbb{C}$ -алгебру E (с единицей) образующими x, y и определяющими соотношениями $x' = 1$, $x^2 y' + y - x = 0$. Положим, $\bar{x}(z) \stackrel{\text{def}}{=} z$, $\bar{y}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! \cdot z^{(m+1)}$ и породим $\bar{x}, \bar{y}$ в степенных рядах $\mathbb{C}[[z]]$ дифференциальную $\mathbb{C}$ -подалгебру $\bar{E}$ относительно дифференцирования $\frac{d}{dz}$. Непосредственная проверка показывает, что $\frac{d\bar{x}}{dz} = 1$, $\bar{x}^2 \frac{d\bar{y}}{dz} + \bar{y} - \bar{x} = 0$ в $\mathbb{C}[[z]]$. Поэтому область целостности $\bar{E}$ является гомоморфным образом E при $\phi : E \rightarrow \bar{E}$ ($\phi(x) = \bar{x}$, $\phi(y) = \bar{y}$) и мы последовательно получаем

- а) $\text{Ker} \phi = \{a \in E | x^{2m} \cdot a = 0 \ (m = m(a))\}$,
- б) для максимального идеала $M \in \text{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$, являющегося пересечением $\bar{E}$ с единственным максимальным идеалом в $\mathbb{C}[[z]]$, при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M : \bar{E} \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ имеем $\tilde{\psi}_M(\bar{x}) = \bar{x}$, $\tilde{\psi}_M(\bar{y}) = \bar{y}$, т.е. $\text{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$ неаналитичен в точке M ;
- в) $\bar{x}, \bar{y}$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$ (в противном случае $\bar{E}$ совпадала бы с некоторой параметризацией Пюизо $\bar{P}_H$ ($H(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$) и $\text{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$ был бы аналитичным);
- г) $\bar{E}$ может быть реализована в поле рациональных функций $\mathbb{C}(x, y)$ как дифференциальная $\mathbb{C}$ -подалгебра относительно дифференцирования $D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x-y}{x^2} \frac{\partial}{\partial y}$.

Таким образом, дифференциальная область целостности $\bar{E}$ имеет над $\mathbb{C}$ степень трансцендентности равную 2, ее спектр максимальных идеалов не аналитичен и, следовательно, как коммутативно-ассоциативная $\mathbb{C}$ -алгебра, $\bar{E}$ не может порождаться конечным числом своих элементов.

Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверку еще двух свойств $\mathbb{C}$ -алгебры $\bar{E}$:

- д) $\mathbb{C}[x, y] \subset \bar{E} \subset \mathbb{C}[x, y, x^{-1}] \subset \mathbb{C}(x, y)$;
- е) $\bar{E}$ - простая дифференциальная $\mathbb{C}$ -алгебра.

5. Доказательство теоремы 2. Так как алгебра $k[X]$ конечно порождена, то ее произвольная k -подалгебра C счетномерна. Если C содержит единичный элемент алгебры $k[X]$, то выберем в C базис $\{e_i | i = 0, 1, \dots\}$ так, чтобы $e_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Положим $C_0 \stackrel{\text{def}}{=} k \cdot e_0$, $C_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} C_i[e_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Так как поле k алгебраически замкнуто, то k -алгебра C_1 изоморфна алгебре многочленов $k[e_1]$. Рассмотрим возрастающую цепочку полей частных $Q(C_i)$ k -алгебр C_i . Так как $k[X]$ конечно порождена и $\deg_k k(X) = 1$, то поле $k(X)$ является конечным расширением подполя $Q(C_1)$ и $\dim_{Q(C_1)} Q(C_i) \leq \dim_{Q(C_1)} Q(C_{i+1}) \leq \dim_{Q(C_1)} k(X)$. Следовательно, возрастающая цепочка полей $Q(C_i) (i = 0, 1, 2, \dots)$ стабилизируется, начиная с некоторого номера N : $Q(C_N) = Q(C_{N+i}) (i = 1, 2, \dots)$. Положим, $A \stackrel{\text{def}}{=} C_N$, тогда $Q(A) = Q(C) \subseteq k(X)$ и вложение $A \subset k[X]$ задает регулярное отображение $\nu : X \rightarrow X_A \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_k A$. Так как $\deg_k k(X) = 1$, то множество $X_A \setminus \nu(X)$ конечно и X_A

содержит конечное число особых точек. Поэтому в k -алгебре A можно выбрать такой элемент d , что

а) локализация $A_d \stackrel{\text{def}}{=} A[d^{-1}] \subset Q(A)$ алгебры A по элементу d - целозамкнутая k -алгебра;

б) локализация $(k[X])_d$ состоит из алгебраических над A_d элементов и любой идеал из $\text{Срес}_k A_d$ поднимается до идеала из $\text{Срес}_k(k[X])_d$, в частности, до идеала из $\text{Срес}_k(C_{N+i})_d$. Применяя предложение 1 при $F = A_d, G = (C_{N+i})_d$, заключаем, что $A_d = (C_{N+i})_d = C_d$ и мы получаем цепочку подалгебр $A \stackrel{\text{def}}{=} C_N \subseteq C \subseteq B \stackrel{\text{def}}{=} A_d = (C_{N+i})_d \subseteq Q(A)$, удовлетворяющую всем условиям леммы об аффинности промежуточной подалгебры. Это завершает доказательство теоремы в случае, когда k -подалгебра C содержит единицу.

В противном случае рассмотрим k -подалгебру $C_{\text{id}} \stackrel{\text{def}}{=} k \cdot 1 \oplus C$, которая по уже доказанному порождается некоторыми своими элементами $e_i = \lambda_i \cdot 1 \oplus c_i$ ($i = 1, \dots, m, m = m(C), c_i \in C, \lambda_i \in k$). Но тогда $c_1, \dots, c_m \in C$ порождают. Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Р. Шафаревич *Основы алгебраической геометрии*, МЦНМО, 2007.
2. О.В. Герасимова, Г.А. Погудин, Ю.П. Размыслов, *Rolling simplexes and their commensurability, III (Соотношения Капелли и их применения в дифференциальных алгебрах)*, Фундаментальная и прикладная математика, том 19, выпуск 6, 2014, стр. 7-24.