УДК 512.543.7 + 512.544.33 + 512.815.8 + 517.984.5 + 514.84

OF THE IMPORTANCE OF KEEPING THE GRAVITY
(о реинкарнации третьего закона Кеплера)

О. В. Герасимова, [1] **Ю. П. Размыслов**[2]

Около четырех веков назад Роберт Гук, рассматривая проекции плоских сечений конуса $x^2+y^2=z^2$ (вдоль оси вращения на плоскость Oxy), выписал (см. [1]) одно из фундаметальнейших дифференциальных уравнений $(x,y,z)''=-\frac{4\pi^2 k}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\cdot(x,y,z)$, которое легло в дальнейшем в основу закона Всемирного тяготения и объяснения движения заряженной частицы в классическом стационарном кулоновом поле. В данной работе предлагаются и изучаются дифференциально-алгебраические модели, возникающие в результате замены конуса на произвольную поверхность второго порядка $F(x,y,z)=0$ при (названной нами стандартной) кеплеровой параметризации семейства квадратичных кривых $\{F(x,y,\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta)=0\mid \alpha,\beta,\delta\in K\}$ $(K=\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Ключевые слова: плоская кривая, её кеплерова параметризация; уравнения Птолемея, Гука, Больцмана; дифференциальная алгебра, её ранг, аналитический спектр, росток траектории, замыкание орбиты; поля параболического, конического/кулонова, гиперболического, амперова, обобщенного типа.

"The function of the literary artist
is to invent, not to chronicle."
Оскар Уайльд

1. Введение. Сказано было (см. [1]): "Формулы не горят. Они имеют обыкновение восставать из пепла в самый неподходящий момент." (Вполне возможно.) Мы еще раз вспомнили об этом, когда проводили детальный анализ результатов диссертации [2] (см. главу 2: "Лемма о директрисе и фокусе"), в которой, используя технику соотношений Капелли и определителей Вронского, была предпринята попытка выделить некоторые кеплеровы дифференциально-алгебраические модели, возникающие естественным способом при рассмотрении проекций на плоскость Oxy плоских сечений следующих поверхностей второго порядка

а) параболоида вращения $x^2+y^2=z$ (соответствующее семейство кривых второго порядка $\{x^2+y^2-\alpha x-\beta x-\delta=0\mid \alpha,\beta,\delta\in K\ (K=\mathbb{R},\mathbb{C})\}$ - это окружности);

б) конуса вращения $x^2+y^2=z^2$ (здесь семейство $\{(\alpha x+\beta y+\delta)^2-x^2-y^2\mid \alpha,\beta,\delta\in K\}$ - это все кривые второго порядка с фокусом в начале координат);

в) двуполостного $x^2+y^2+r_0^2=z^2$ и однополостного $x^2+y^2-r_0^2=z^2$ гиперболоидов вращения.

Полученные в каждом из этих случаев (дифференциальные) уравнения поразили нас настолько, что для эпатажа ценителей и хранителей научных истин и ценностей авторы решили в начале марта 2016 года загрузить в багаж[3] сайта кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова следующие прикольные смайлики.

1.1. *Поля параболического типа.* Уравнения Птолемея:

---

[1] *Герасимова Ольга Вячеславовна* — асп. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ynona_olga@rambler.ru.

[2] *Размыслов Юрий Питиримович* — доктор физ.-мат. наук, сотр. лаб. выч. методов мех.-мат. ф-та МГУ, e–mail: ynona_olga@rambler.ru.

[3] *Девчонка* сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, корзину, *корыто*, картонку и маленькую собачонку.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = -\frac{4\pi^2 k}{\left(\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ (k \in K, K = \mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

1.2. $\pm$-*фокусировки плоских волн.* Уравнения О. В. Герасимовой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, k \in K).$$

1.3. *Поля конического/кулонова типа.* Уравнения Роберта Гука:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = -\frac{4\pi^2 k}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ (k \in K, K = \mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

1.4. *Поля гиперболического типа.* Уравнения Н. Никчемного:
1.4.1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = -\frac{4\pi^2 k}{d_+^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \left(d_+ \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 + r_0^2}{1 + r_0^2 \cdot \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}}}, \ r_0, k \in K \right);$$

1.4.2.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = -\frac{4\pi^2 k}{d_-^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \left(d_- \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 - r_0^2}{1 - r_0^2 \cdot \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}}}, \ r_0' = 0, k \in K \right).$$

1.5. *Поля амперова типа.* Уравнения Больцмана:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = -\frac{4\pi^2 k}{d_c^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \left(d_c \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{c^2}}{1 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}}}, \ k, c \in K \right).$$

“Был долго мглою мир окутан.
“Да будет свет!” - и вот явился Ньютон.
Но Сатана недолго ждал реванша:
Пришёл Эйнштейн и стало всё как раньше.”
С. Я. Маршак

1.6. *О волютнаризме гениальных догадок.*[4] Мы до сих пор полагаем, что праздный наблюдатель, волею случая заглянувший на наши сайты, изрядно похихикав над бессребрянностью “загадочной русской души” и “детским лепетом” выложенных нами в сеть

[4] *“Сизифы вверх по горе идут напрасно – внизу Рене Декарт им излагает связно всё и ясно.”*

“нерелятивистских недоделок”, все-таки сумеет в конце концов “сложить два плюс два”, подметив, что

а) названные нами уравнения Больцмана получаются из уравнений п.п. 1.4.2 наложением дополнительного дифференциального определяющего соотношения $r_0^2 = \sigma^2/c^2$, где $\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}^2$;

б) при $c \to \infty$ эти уравнения становятся уравнениями Р. Гука;

в) при крайне нефизичном переходе $c \to 0$ уравнения Больцмана превращаются в уравнения Птолемея;

г) уравнения О. В. Герасимовой стоят несколько особняком, так как источник волны и центр её фокусировки не совпадают;

д) все эти уравнения вписываются в рамки единой универсальной теории центрально-квадратичной динамики (см. [1] – [4]).

"Дама сдавала в багаж
Диван, чемодан, саквояж,
Корзину, картину, картонку
И маленькую собачонку."
С. Я. Маршак

За прошедшие пару лет, главным образом благодаря усилиям О. В. Герасимовой (см. [2], [4], [5]), все эти "собачонки-смайлики" вполне себе подросли. Введённые ею в дифференциально-алгебраический обиход такие объекты и понятия, как дифференциальные C-алгебры ранга 1, росток траектории, аналитический спектр, замыкание орбиты, вместе с фундаментальными результатами Г. А. Погудина (см. [6] – [8]) позволили сделать вывод, что у подобных уравнений все формальные их решения в степенных рядах являются "сходящимися", а замыкание орбит – это аффинные алгебраические кривые, бирационально изоморфные кривым второго порядка (а над полем $\mathbb{C}$ – комплексной аффинной прямой (см. [9])).

Обо всём об этом мы потолкуем ниже.

Начнём же мы с рассмотрения семейства неразложимых кривых

$W_F \overset{\mathrm{def}}{=} \{F(x, y, \alpha x + \beta y + \delta) = 0 \mid \alpha, \beta, \delta \in K \ (K = \mathbb{R}, \mathbb{C})\}$,

где $F(x, y, z) = 0$ - это фиксированное уравнение произвольной поверхности второго порядка, центрально-квадратичная динамика на которых определяется законом [5]

$4\pi^2 k = \sigma^2/\sqrt{\det F_{\alpha,\beta,\delta}}$ (правило Феникса),

где $\sigma \overset{\mathrm{def}}{=} xy' - x'y$, а $F_{\alpha,\beta,\delta}$ - это квадратная 3×3 матрица квадратичной формы $F(x, y, \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)$.

2. Тактические манёвры (комплексификация и медитация). В этой рубрике мы приведём правдоподобные соображения, как по любому квадратичному полиному $F(x, y, z)$ ($\deg_z F > 0$) конструктивно построить уравнение $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -\frac{4\pi^2 k}{d_F^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где d_F^2 - рациональная функция от переменных x, y, x', y', все решения которого лежат на кривых семейства W_F.

Сразу зафиксируем (но не очень жёстко) отправные пункты наших последующих рассуждений

(i) $x(z), y(z)$ - голоморфные функции комплексного переменного z, определённые в некоторой области комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$;

(ii) $x(z) \cdot y'(z) - x'(z) \cdot y(z) = \sigma \in \mathbb{C}, \sigma \neq 0$;

(iii) $G(x(z), y(z)) = 0$, где $G(x, y)$ - аналитическая функция.

Эти условия будут пополняться и уточняться по мере развития сюжета и интриги. [6]

"It is the uncertainty that charms one.
A mist makes things wonderful."
Оскар Уайльд

2.1. *Предварительные сведения и соотношения.* Из условия (ii) следует, что $x(z)y''(z) - x''(z)y(z) = 0$, откуда заключаем, что $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}'' = -\frac{x'(z)y''(z) - x''(z)y'(z)}{x(z)y'(z) - x'(z)y(z)} \cdot \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$. Поэтому, (так как $\sigma \neq 0$) $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}'' = -w(z) \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$, где функция $w(z)$ голоморфна и определена там же, где $x(z), y(z)$.

[5]Этот закон был открыт и проверен О. В. Герасимовой для уравнений п.п. 1.1, 1.3, 1.4. При этом оказалось, что для уравнений Р. Гука $\sigma^2/\sqrt{\det F_{\alpha,\beta,\delta}}$ равняется σ^2/δ. В работе [1] было доступно (и популярно) объяснено, что соотношение $4\pi^2 k_s = \sigma^2/\delta$, где k_s – это "солнечная постоянная", равносильно третьему закону Кеплера.

[6]*"Именно такая неопределенность чарует нас. Дымка делает некоторые вещи поразительными."*

Дифференцируя равенство (iii), из системы уравнения (относительно x', y') $\frac{\partial G}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot y' = 0$, $-y \cdot x' + x \cdot y' = \sigma$ получаем, что

$$L_G(x(z), y(z)) \cdot \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}' = \sigma \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x(z), y=y(z)} \tag{1}$$

где $L_G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial G}{\partial y}$. Дифференцируя (1) и исключая в получающемся соотношении $x'(z), y'(z)$ при помощи (1) находим, что

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}'' = \left(\frac{\sigma^2}{L_G^3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} \right)\Bigg|_{x=x(z), y=y(z)} \cdot \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Равенства (1), (2) доказывают следующее утверждение.

Лемма 1. *Если кривая* $(x(z), y(z))$ *удовлетворяет условиям* (i)-(iii), *то на ней выполняются соотношения*

$$w(z) = \frac{\sigma^2}{L_G^3} \cdot \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 \right), \tag{3}$$

$$w(z) \cdot L_G(x,y) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} (x')^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \cdot x'y' + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} (y')^2. \tag{4}$$

Следствие. *Если кривая* $(x(z), y(z))$ *лежит на квадратичной кривой* $H(x,y) = 0$, *где* $H(x,y) = h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2 + 2h_{31}x + 2h_{32}y + h_{33}$ $(h_{12} = h_{21}, h_{13} = h_{31}, h_{23} = h_{32})$, *то на ней выполняются равенства* [7]

$$w(z) = \sigma^2 \cdot \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} / (h_{31} \cdot x(z) + h_{32} \cdot y(z) + h_{33})^3, \tag{5}$$

$$L_H(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = -2(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}), \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Добавим к условиям (i)-(iii) ещё два

(iv) $F(x(z), y(z), \alpha x(z) + \beta y(z) + \delta) = 0$ (кривая $(x(z), y(z))$ лежит на одной из семейства W_F);

(v) $\det F_{\alpha,\beta,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ (условие неразложимости квадратичной кривой).

Тогда для $H(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y, \alpha x + \beta y + \delta)$ справедливы все утверждения следствия леммы 1. Чтобы определить $G(x,y)$ по $H(x,y)$ разрешим уравнение $H(x,y) = 0$ относительно выражения $\alpha x + \beta y + \delta$.

2.2 *Волны неизвестного (возможно никчёмного) типа:* $\deg_z F = 2$. Представим квадратичный полином $F(x,y,z)$ в виде $F(x,y,z) = q(x,y) - (z + p(x,y))^2$ $(\deg q(x,y) \leq 2, \deg p(x,y) \leq 1)$. Определим аналитическую функцию $\bar{G}(x,y)$ уравнением $\bar{G}^2 = q(x,y)$. Тогда $F(x,y,z) = G_-(x,y) \cdot G_+(x,y)$ $(G_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \bar{G}(x,y) \pm (\alpha x + \beta y + \delta + p(x,y)), \deg p(x,y) \leq 1)$. Из условий (i),(iv) заключаем, что либо $G_-(x(z), y(z)) = 0$, либо $G_+(x(z), y(z)) = 0$, и для выполнения условия (iii) полагаем функцию $G(x,y)$ равной $G_-(x,y)$, если $(x(z), y(z))$ лежит на кривой $G_-(x,y) = 0$, и $G_+(x,y)$ в противном случае. Применяя дифференцирование $x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ к обеим частям равенства $H(x,y) = G_-(x,y) \cdot G_+(x,y)$, замечаем, что на кривой $x(z), y(z)$ выполняется (ключевое для понимания дальнейшего) равенство

[7] В работе [1] было показано, что для этой функции $w(z)$ выполняется следующее фундаментальное соотношение $9w^2w''' - 45ww'w'' + 40(w')^3 + 9w^3w' = 0$.

$$L_H(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y} = \left(x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y}\right)\cdot 2\cdot \bar{G}(x,y) = 2L_G(x,y)\cdot \bar{G}(x,y). \qquad (8)$$

В частности, (см. формулу (4))

$$w(z)\cdot L_G(x,y) = \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2}(x')^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x \partial y}x'y' + \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial y^2}(y')^2, \qquad (9)$$

$$w(z)\cdot L_H(x,y) = 2\cdot \bar{G}(x,y)\cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2}(x')^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x \partial y}x'y' + \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial y^2}(y')^2\right) \in \mathbb{C}(x,y,x',y'). \qquad (10)$$

Нетрудно заметить, учитывая равенство $\bar{G}^2(x,y) = q(x,y)$ ($\deg_C q(x,y) \le 2$), что выражение в правой части (10) является конкретной рациональной функцией от переменных x, y, x', y', в знаменателе которой стоит полином q.

Положим $U(x,y,x',y') \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\bar{G}(x,y)}{(xy'-x'y)^2}\cdot\left(\frac{\partial^2\bar{G}}{\partial x^2}(x')^2 + 2\frac{\partial^2\bar{G}}{\partial x\partial y}x'y' + \frac{\partial^2\bar{G}}{\partial y^2}(y')^2\right)$.

Лемма 2. *На какой бы прямой семейства W_F ни лежала бы кривая $x(z), y(z)$, где σ в условии* (ii) *произвольна, для рациональной функции $U(x,y,x',y')$ на $x(z), y(z)$ выполняется равенство*

$$U\Big|_{\substack{x=x(z),\ y=y(z)\\ x'=x'(z),\ y'=y'(z)}} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{vmatrix} / (h_{31}\cdot x(z) + h_{32}\cdot y(z) + h_{33})^2. \qquad (11)$$

Доказательство. Прямое вычисление с последовательным использованием соотношений (10), (6), (5).

Следствие.

$$U^3\Big|_{\substack{x=x(z),\ y=y(z)\\ x'=x'(z),\ y'=y'(z)}} = \frac{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{vmatrix}}{\sigma^4}\cdot w^2(z). \qquad (12)$$

Доказательство. Применить соотношения (11), (5).

Полагая $\sigma^4 = (4\pi^2 k)^2 \det F_{\alpha,\beta,\delta}$ (k-"стандартная" Кеплерова параметризация на кривой $F(x,y,\alpha x+\beta y+\delta) = 0$ семейства W_F) и определяя $d_F(x,y,x',y')$ из уравнения $d_F^2 = \frac{1}{U}$, получаем дифференциальные уравнения Браге-Декарта-Уоттона

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}'' = -\frac{4\pi^2 k}{(d_F(x,y,x',y'))^3}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}.$$

Ну вот и всё на данный момент. [8] Конец медитационного феникс-трюка. [9]

---

[8]**Теорема 1.** *Каждое аналитическое решение $x(z)$, $y(z)$ уравнений*
$(x,y)'' = -4\pi^2 k\cdot(u(x,y,x',y'))^3\cdot(x,y)$,
$u^2 = (\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x')^2 + 2\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial y}x'y' + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}(y')^2\right)\cdot q(x,y)/2 - \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x') + \frac{\partial q}{\partial y}(y')\right)^2/4)/(q(x,y)\cdot(xy'-x'y)^2)$.
лежит на одной из кривых семейства $\{q(x,y) - (\alpha x(z) + \beta y(z) + \delta)^2 | \alpha,\beta,\delta \in \mathbf{C}\}$.

[9]Глядя на третий закон Кеплера $k_S = a^3/T^2$, формулу площади эллипса

3. Там, где чисто и светло (формализация, локализация, нормализация). В этой рубрике мы переведём содержательные рассуждения и утверждения предыдущего пункта на язык дифференциальной алгебры и придадим им точный алгебраический смысл.

Для любого "квадратичного" многочлена

$q(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} q_{11}x^2+2q_{12}xy+q_{22}y^2+2q_{13}x+2q_{23}y+q_{33} \in C[x,y]$ (не являющегося "квадратом") зафиксируем следующие обозначения

$H_q(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} q(x,y)-(\alpha x+\beta y+\delta)^2 \in C[x,y,\alpha,\beta,\delta]$

(т.е. α,β,δ,x,y - независимые переменные),

$$(q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \ (q_{ij}=q_{ji}), |(q)| \stackrel{\text{def}}{=} \det(q), \det(H_q)=|(H_q)|,$$

$$(H_q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = (q) - \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\delta \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\delta \\ \alpha\delta & \beta\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \ (h_{ij}=h_{ji}, h_{ij}\in C[\alpha,\beta,\delta]).$$

Зададим дифференциальную C-алгебру (с единицей) W_q шестью дифференциальными образующими $\sigma,\alpha,\beta,\delta,x,y$ и шестью дифференциальными определяющими соотношениями $\sigma'=0,\alpha'=0,\beta'=0,\delta'=0,(xy'-x'y)=\sigma,H_q(x,y,\alpha,\beta,\delta)=0$.

Для любого максимального идеала $M\in \mathrm{Spec}_C W_q$ определим дифференциальный гомоморфизм $\widetilde{\psi}_M : W_q \to C[[z]]$, полагая для любого $a\in W_q$

$$\widetilde{\psi}_M(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_M(a^{(i)})z^i/i!,$$

где $\psi_M : W_q \to C$ - канонический C-гомоморфизм $W_q \to W_q/M \simeq C$, $a^{(i)}$ - результат i-кратного применения сигнатурного дифференцирования $'$ к элементу a.

Очевидно, что степенные ряды $\bar{x}_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(x), \bar{y}_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(y)$ являются решениями ненулевого квадратичного уравнения $0=\bar{H}_q(x,y,\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\delta}) \stackrel{\text{def}}{=} q(x,y)-(\bar{\alpha}x+\bar{\beta}y+\bar{\delta})^2$, где $\bar{\alpha}=\widetilde{\psi}_M(\alpha), \bar{\beta}=\widetilde{\psi}_M(\beta)$, $\bar{\delta}=\widetilde{\psi}_M(\delta)\in C$ (т.е. для них выполняется условие (iv) предыдущего пункта).

К сожалению в W_q имеются делители нуля и в ней содержится свободная дифференциальная C-алгебра с одним свободным образующим. Поэтому (согласно работе [7]) в ней полно максимальных идеалов M, для которых радиус сходимости рядов $\bar{x}_M(z), \bar{y}_M(z)$ равен нулю. Однако, если $\bar{\sigma}=\widetilde{\psi}_M(\sigma)$, $\overline{|(H_q)|}=\widetilde{\psi}_M(|H_q|)$ не равны нулю, то

а) полином $\bar{H}_q(x,y,\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\delta})$ будет неприводим;

б) $\bar{\sigma}\neq 0$ задает нетривиальную кеплерову параметризацию плоской неразложимой квадратичной кривой $\bar{H}_q(x,y)=0$

и согласно работе [4] для C-подалгебры $\widetilde{\psi}_M(W_q)$ в $C[[z]]$ будут выполняться свойства

(a) ее степень трансцендентности $\deg_C(\widetilde{\psi}_M(W_q))$ равна единице;

(b) $\widetilde{\psi}_M(W_q)$ конечно порождена, как коммутативно-ассоциативная C-алгебра;

(c) ряды $\bar{x}_M(z), \bar{y}_M(z)$ сходятся в некоторой окрестности нуля комплексной плоскости C^1.

Следовательно, соблюдение для степенных рядов $\bar{x}_M(z), \bar{y}_M(z)$ условий (ii), (v) п. 2 автоматически вынуждает локальное выполнение условия (i). Чтобы ограничиться рассмотрением только таких максимальных идеалов и обеспечить победный ход нашим предыдущим рассуждениям (см. подпункт 2.2) с алгебраической точки зрения необходимо и достаточно перейти от рассмотрения спектра C-алгебры W_q к спектру локализации $\widetilde{W}_q \stackrel{\text{def}}{=} W_q[\sigma^{-1},|(H_q)|^{-1}]$ алгебры W_q по элементам σ и $\det(H_q)$.

Здесь, как нам кажется, самое время обратить внимание читателя на следующее

Замечание 1. Для любой конечно-порожденной дифференциальной C-алгебры A положим $\mathrm{RNG}_C A \stackrel{\text{def}}{=} \max_{M\in \mathrm{Spec}_C A} \deg_C \widetilde{\psi}_M(A)$. В работе авторов [5] было показано, что если $\mathrm{RNG}_C A \leq 1$, то в A выполняются следующие свойства

а) спектр C-алгебры A аналитичен (см. выше свойство (c));

$$S^2=\pi^2 \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}^2 \Big/ \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}^3,$$

соотношение О. В. Герасимовой (12), создается впечатление, что конструктор Вселенной выбрал для контакта не теорему Пифагора, а разрешение особенности плоской алгебраической кривой $Y^2=X^3$. То, что эта кривая бирационально изоморфна прямой, было известно в 17-ом веке П. Ферма (Р. Декарту, Р. Гуку).

б) для любого $M \in \mathrm{Spec}_C A$ для $\widetilde{\psi}_M(A)$ выполняется свойство (b);

в) любая (дифференциально) конечно-порождённая дифференциальная C-подалгебра B в A также имеет ранг $\mathrm{RNG}_C B$ не превосходящий единицы.

Мы знаем, что $\mathrm{RNG}_C \widetilde{W}_q = 1$ (см. выше свойство (a)) поэтому в $\widetilde{W}_q$ любая ее конечно-порожденная C-подалгебра имеет ранг, равный единице или 0, в частности C-подалгебра $\widehat{W}_q$ дифференциально-порожденная в $\widetilde{W}_q$ элементами $x, y, \alpha, \beta, \delta$ приобретает принципиально новые свойства по сравнению с изначальной W_q. Таким образом при локализации произвольной C-алгебры A ее образ $\widehat{A}$ при каноническом гомоморфизме $A \to \widetilde{A}$ может становиться более ручным (важная составляющая феникс-трюка).

3.1. *Свойства дифференциальной C-алгеры $\widetilde{W}_q$.* Положим $L_H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial H_q}{\partial x} x + \frac{\partial H_q}{\partial y} y$. Это полином из $C[x, y, \alpha, \beta, \delta]$. Применяя сигнатурное дифференцирование к обеим частям равенства $H_q(x, y) = 0$, последовательно получаем

$$\frac{\partial H_q}{\partial x} x' + \frac{\partial H_q}{\partial y} y' = 0 \tag{13}$$

$$\sigma \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_q}{\partial y} \\ \frac{\partial H_q}{\partial x} \end{pmatrix} = (xy' - x'y) \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_q}{\partial y} \\ \frac{\partial H_q}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\frac{\partial H}{\partial x} x' + x' y \frac{\partial H_q}{\partial y} \\ x \frac{\partial H}{\partial x} y' + y y' \frac{\partial H_q}{\partial y} \end{pmatrix} = L_{H_q} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$L_{H_q}^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_q}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H_q}{\partial x \partial y} & y' \\ \frac{\partial^2 H_q}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & -x' \\ y' & -x' & 0 \end{vmatrix} = \sigma^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_q}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H_q}{\partial x \partial y} & \frac{\partial H_q}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 H_q}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & \frac{\partial H_q}{\partial y} \\ \frac{\partial H_q}{\partial x} & \frac{\partial H_q}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} \cdot \sigma^2 = 2^3 |(H_q)| \cdot \sigma^2. \tag{15}$$

Лемма 3. *Элементы L_{H_q}, $w \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma^2 |(H_q)|/(h_{31}x + h_{32}y + h_{33})^3 = (-2)^3 \sigma^2 |(H_q)|/(L_{H_q})^3$, $h_{11}x'^2 + h_{22}y'^2 + 2h_{12}x'y'$ обратимы в $\widetilde{W}_q$.*

Доказательство вытекает из обратимости $|(H_q)|$, σ^2 в $\widetilde{W}_q$ и соотношения (15).

Зададим вспомогательную коммутативно-ассоциативную C-алгебру (с единицей) E_q образующими $\sigma, x, y, \alpha, \beta, \delta$ и определяющими соотношениями $q(x, y) - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = 0$. Так как по условию $q(x, y)$ не является квадратом некоторого многочлена из $C[x, y]$, то полином $H_q(x, y, \alpha, \beta, \delta)$ - неприводим в $C[\sigma, x, y, \alpha, \beta, \delta]$. Следовательно, E_q не содержит делителей нуля. Определим на $E_q[L_{H_q}^{-1}]$ дифференцирование $'$, полагая

$$\alpha' = \beta' = \delta' = \sigma' = 0, (x, y)' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sigma}{L_{H_q}} \left(-\frac{\partial H_q}{\partial y}, \frac{\partial H_q}{\partial x} \right) \tag{16}$$

Непосредственная проверка показывает, что тогда $xy' - x'y = \sigma$, $H_q' = 0$ и введенное по правилу (16) дифференцирование в локализации $E_q[L_H^{-1}]$ корректно определено.

Предложение 1. *Как коммутативно-ассоциативная C-алгебра дифференциальная C-алгебра $\widetilde{W}_q$ порождается элементами $\sigma, x, y, \alpha, \beta, \delta$ и σ^{-1}, $|(H_q)|^{-1}$, $L_{H_q}^{-1}$. Как дифференциальная C-алгебра она изоморфна локализации $(E_q[L_{H_q}^{-1}, \sigma^{-1}, H^{-1}])$ C-алгебры $E_q[L_{H_q}^{-1}]$ по элементам $\sigma, |(H_q)|$, в частности $\widetilde{W}_q$ является областью целостности и её степень трансцендентности равна пяти.*

Так как $\sigma, |(H_q)|, L_{H_q}$ обратимы в $\widetilde{W}_q$, то доказательство немедленно вытекает из соотношения (14), (15) и определения дифференцирования (см. (16)) на локализации $E_q[L_H^{-1}]$ C-алгебры E_q по элементу $L_H \in E_q$.

Лемма 4. *Для элемента $w \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma^2 |(H_q)|/(h_{31}x + h_{32}y + h_{33})^3 = \sigma^2 |(H_q)|/(L_H/(-2)^3)$ в $\widetilde{W}_q[q^{-1}]$ выполняются следующие соотношения*

$$(x, y)'' = -w \cdot (x, y), \tag{17}$$

$$w \cdot (L_H/-2) = (\bar{q}/q) = \sigma^2 |(H_q)|/(L_H/2)^2, \tag{18}$$

$$w^2 = \frac{\sigma^4}{|(H_q)|} \left(\frac{\bar{q}}{\sigma^2 q} \right)^3, \tag{19}$$

$$w' = \frac{3}{2} w \cdot \frac{(\bar{q}/(\sigma^2 q))'}{\bar{q}/(\sigma^2 q)}, \tag{20}$$

где $\bar{q} \stackrel{\rm def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}x'^{\,2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}x'y' + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}y'^{\,2}\right) q - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial q}{\partial x}x' + \frac{\partial q}{\partial y}y'\right)^2$.

Доказательство. Равенство (17) проверяется в лоб используя (16) (см. также следствие леммы 1). Соотношения (18), (19) мы фактически доказали в п.п. 2.2 (см. равенства (10)-(12)) для всех гомоморфизмов Тэйлора $\widetilde{\psi}_M$ ($M \in \mathrm{Spec}_C \widetilde{W}_q[q^{-1}]$) и следовательно они выполняются на всем спектре $\widetilde{W}_q[q^{-1}]$. Так как $\widetilde{W}_q$ - область целостности (и не содержит нильпотентных элементов), то это доказывает равенства (18), (19). (Особо отметим, что они могут быть проверены (благодаря предложению 1) и прямым вычислением, так как (16) сводит проблему равенства в $\widetilde{W}_q$ к проверке делится ли конкретный полином в $C[\sigma, x, y, \alpha, \beta, \delta]$ на $H_q(x, y, \alpha, \beta, \delta)$).

Породим C-алгебру Φ_q в $\widetilde{W}_q$ фазовыми переменными x, y, x', y', w. Локализация $\bar{\Phi}_q$ этой подалгебры по элементам $xy' - x'y, w, q$ лежит в $\widetilde{W}_q[q^{-1}]$ и порождается $x, y, x', y', w, w^{-1}, \sigma^{-1}, q^{-1}$. Из формулы (19) видно, что $|(H_q)| \in \bar{\Phi}_q$. Положим $\widetilde{\Phi}_q \stackrel{\rm def}{=} \bar{\Phi}[|(H_q)|^{-1}] = \bar{\Phi}_q[\bar{q}^{-1}]$.

Предложение 2. *Поле частных $Q(\widetilde{W}_q)$ является квадратичным расширением подполя $Q(\Phi)$, в частности фазовые переменные алгебраически независимы. Более того,*

$$\widetilde{W}_q[q^{-1}] = \widetilde{\Phi}_q[\alpha x + \beta y + \delta] \quad ((\alpha x + \beta y + \delta)^2 = q).$$

Доказательство. Очевидно, что $q', q'' \in \bar{\Phi}_q$, а $(\alpha x + \beta y + \delta)^{-1} = (\alpha x + \beta y + \delta)/q \in \bar{\Phi}[\alpha x + \beta y + \delta]$. Дифференцируя обе части равенства $q = (\alpha x + \beta y + \delta)^2$ последовательно получаем

$q' = 2(\alpha x + \beta y + \delta)(\alpha x' + \beta y')$,

$q'' = 2(\alpha x' + \beta y')^2 - w \cdot (\alpha x + \beta y + \delta)(\alpha x + \beta y)$.

Из них заключаем, что $\alpha x' + \beta y', \alpha x + \beta y \in \bar{\Phi}[\alpha x + \beta y + \delta]$, откуда (так как $xy' - x'y$ обратим в $\bar{\Phi}_q$) вытекает, что α, β (и δ) принадлежат $\bar{\Phi}_q[\alpha x + \beta y + \delta]$, а все образующие $q^{-1}, \alpha, \beta, \delta, x, y, \sigma, \sigma^{-1}, |H_q^{-1}|$ в алгебре $\widetilde{W}_q[q^{-1}]$ и она сама содержится в $\widetilde{\Phi}[\alpha x + \beta y + \delta]$. Вместе с равенством $\deg_C \widetilde{W}_q = 5$. Это доказывает все утверждения предложения 2.

Следствие. *Все максимальные идеалы в $\widetilde{\Phi}_q$ поднимаются до максимальных идеалов в $\widetilde{W}_q[q^{-1}]$.*

Лемма 5. *C-подалгебра $\widetilde{\Phi}_q$ выдерживает сигнатурное дифференцирование C-алгебры $\widetilde{W}_q[q^{-1}]$.*

Доказательство получается дифференцированием обеих частей соотношения (19), выполняющегося в $\widetilde{\Phi}_q$ (так как $w^{-1} \in \widetilde{\Phi}_q$, см. также (20)).

3.2. *Дифференциальные C-алгебры Браге-Декарта-Уоттона.* Для их описания на данный момент наметились три равносильных подхода.

Уоттоновская версия (О. В. Герасимова). Дифференциальная C-алгебра $\widehat{W}_{q,k}$ задается образующими $x, y, w, w^{-1}, (q(x,y))^{-1}, (xy' - x'y)^{-1}$ и определяющими соотношениями

$x'' = -w \cdot x$, $y'' = -w \cdot y$, $w^2 = (4\pi^2 k)^2 \left(\frac{\bar{q}(x,y,x'y')}{\sigma^2 q(x,y)}\right)^3$ $(0 \neq 4\pi^2 k \in C)$.

Картезианская версия (Н. Никчемный). Классика жанра: дифференциальная C-алгебра $\widehat{D}_{q,k}$ определяется образующими $x, y, d, d^{-1}, \bar{q}^{-1}, (xy' - x'y)^{-1}$ и дифференциальными соотношениями

$x'' = -\frac{4\pi^2 k}{d^3}x$, $y'' = -\frac{4\pi^2 k}{d^3}y$, $d^2 = \left(\frac{(xy' - x'y)^2 q(x,y)}{\bar{q}(x,y,x',y')}\right)$ $(0 \neq 4\pi^2 k \in C)$.

Нормализационная версия. Зададим дифференциальную C-алгебру $\widehat{B}_{q,k}$ образующими $x, y, b, b^{-1}, q^{-1}, (xy' - x'y)^{-1}$ и дифференциальными определяющими соотношениями

$x'' = -4\pi^2 k \cdot b^3 \cdot x$, $y'' = -4\pi^2 k \cdot b^3 \cdot y$, $b^2 = \left(\frac{\bar{q}(x,y,x',y')}{(xy' - x'y)^2 q(x,y)}\right)$ $(0 \neq 4\pi^2 k \in C)$.

Замечание 2. Дифференцируя обе части третьих определяющих соотношений этих алгебр получаем, что любой их элемент выражается через образующие и x', y', т.е. как коммутативно-ассоциативные C-алгебры они конечно порождены и $\widehat{W}_{q,k}$, $\widehat{D}_{q,k}$, $\widehat{B}_{q,k}$ - аффинные дифференциальные C-алгебры.

Теорема 2. *Дифференциальные C-алгебры $\widehat{W}_{q,k}, \widehat{D}_{q,k}, \widehat{B}_{q,k}, \widehat{D}_{q,-k}, \widehat{B}_{q,-k}$ изоморфны.*

Доказательство изоморфизма $\widehat{W}_{q,k}$ и $\widehat{B}_{q,k}$. Заменим в системе дифференциальных образующих $x, y, w, w^{-1}, (xy' - x'y), q^{-1}, \bar{q}^{-1}$ элементы w, w^{-1} на $\bar{b} \stackrel{\rm def}{=} w/(4\pi^2 k \bar{q}/((xy' -$

$x'y)^2q)), \bar{b}^{-1}$. Прямая проверка с использованием третьего определяющего соотношения $\widehat{W}_{q,k}$ показывает, что $\bar{b}^3 4\pi^2 k = w$, $x'' = -4\pi^2 k\bar{b}^3 x, y'' = -4\pi^2 k\bar{b}^3 y$, $\bar{b}^2 = (\bar{q}/\sigma q)$. Следовательно, $\widehat{W}_{q,k}$ является гомоморфным образом $\widehat{B}_{q,k}$ при эпиморфизме $\varphi : \widehat{B}_{q,k} \to \widehat{W}_{q,k}$ $(\varphi(x) = x, \varphi(y) = y, \varphi(b) = \bar{b})$.

Заменим в системе дифференциальных образующих $x, y, b, b^{-1}, \sigma^{-1}, q^{-1}, \bar{q}^{-1}$ элементы b, b^{-1} на $\bar{w} \stackrel{\text{def}}{=} 4\pi^2 kb^3 = 4\pi^2 kb(\bar{q}/(\sigma q)), \bar{w}^{-1}$. Прямая проверка с использованием третьего определяющего соотношения $\widehat{B}_{q,k}$ показывает, что $b = \bar{w}/(4\pi^2 k(\bar{q}/\sigma q))$, $(x, y)'' = -\bar{w}(x, y)$, $\bar{w}^2 = (4\pi^2 k)^2(\bar{q}/\sigma q)^3$. Следовательно, $\widehat{B}_{q,k}$ является гомоморфным образом $\widehat{W}_{q,k}$ при эпиморфизме $\psi : \widehat{W}_{q,k} \to \widehat{B}_{q,k}$ $((\psi(x) = x, \psi(y) = y, \psi(w) = \bar{w})$.

В силу замечания 2 C-алгебры $\widehat{W}_{q,k}, \widehat{B}_{q,k}$ нетеровы и ядро эпиморфизма $\varphi\psi : \widehat{W}_{q,k} \to \widehat{W}_{q,k}$ равно нулю, т.е. эпиморфизмы φ и ψ являются мономорфизмами. Поэтому $\widehat{B}_{q,k} \simeq \widehat{W}_{q,k} \simeq \widehat{B}_{q,-k}$.

Изоморфизм $\widehat{B}_{q,k} \simeq \widehat{D}_{q,k}$ более очевиден и его доказательство мы оставляем читателю.

3.3.*Правило Феникса.* Из леммы 5, замечания 2 и явного вида (20) "производной" элемента w в $\widetilde{W}_q[q^{-1}]$, $\widetilde{\Phi}_q = \bar{\Phi}_q[\bar{q}^{-1}] = \bar{\Phi}_q[|(H_q)|^{-1}]$ и $\widehat{W}_{q,k}$ заключаем, что эпиморфизм $\varphi : \widetilde{\Phi}_q \to \widehat{W}_{q,k}$, при котором $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$, $\varphi(x') = x'$, $\varphi(y') = y'$, $\varphi(w) = w$, корректно определён и является дифференциальным эпиморфизмом.

Предложение 3. *Дифференциальная C-алгебра $\widehat{W}_{q,k}$ (а следовательно и $\widehat{D}_{q,k}, \widehat{B}_{q,k}$) не содержит делителей нуля и $\deg_C \widehat{W}_{q,k} = 4$.*

Доказательство. Сравнивая третье определяющее соотношение для $\widehat{W}_{q,k}$ и соотношение (19) в $\widetilde{\Phi}_q$, получаем, что ядро эпиморфизма $\varphi : \widetilde{\Phi}_q \to \widehat{W}_{q,k}$ содержит элемент

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^4/|(H_q)| - (4\pi^2 k)^2 = w^2/(\bar{q}/(\sigma^2 q))^3 - (4\pi^2 k)^2 \in \widetilde{\Phi}_q. \tag{21}$$

Обозначим через I_a дифференциальный идеал в $\widetilde{\Phi}_q$, порожденный элементом a. Так как $a' = 0$, то $I_a = \widetilde{\Phi}_q \cdot a$ является главным идеалом в $\widetilde{\Phi}_q$. Очевидно, что в фактор-алгебре $\widetilde{\Phi}_q/I_a$ для естественных образующих выполняются все определяющие соотношения C-алгебры $\widehat{W}_{q,k}$ (см. (19)). Следовательно, $\widetilde{\Phi}_q/I_a \simeq \widetilde{W}_{q,k}$ и $\mathrm{Ker}\varphi = I_a$.

Но $\widetilde{\Phi}_q$ (как локализация алгебры многочленов $C[w, x, y, x', y']$ по $xy' - x'y, q, \bar{q}, w$) факториальная C-алгебра и $\deg_C \widetilde{\Phi}_q/I_a = 4$, а наличие делителей нуля в $\widehat{W}_{q,k}$ зависит от разложимости элемента a (см. (21)) на нетривиалные множители. Так как элементы $\sigma, q, \bar{q}$ обратимы $\widetilde{\Phi}_q$, то a разложим в $\widetilde{\Phi}_q$ тогда и только тогда, когда в $\widetilde{\Phi}_q$ разложим элемент $w^2 - (4\pi^2 k)(\bar{q}/(\sigma^2 q))^3$, а это возможно только если числитель и знаменатель дроби $\bar{q}/(\sigma^2 q)$ являются квадратами в $C[x, y, x', y']$. Но с самого начала мы предполагали, что многочлен $q(x, y)$ не является квадратом в $C[x, y]$. Следовательно, a неразложим в $\widetilde{\Phi}_q$ и $\widetilde{\Phi}_q/I_a = W_{q,k}$ - область целостности, что доказывает предложение 3.

Теорема 3. *Для любого максимального идеала $M \in \mathrm{Spec}_C \widehat{W}_{q,k}$ степенные ряды $\bar{x}_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(x)$, $\bar{y}_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(y)$ задают голоморфные функции и C-кривая $\bar{x}_M(z)$, $\bar{y}_M(z)$ лежит на неразложимой квадратичной кривой вида*

$$H_q(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} q(x, y) - (\bar{\alpha}x + \bar{\beta}y + \bar{\delta})^2 = 0 \quad (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta} \in C) \tag{22}$$

причем для комплексной кривой $\bar{x}_M(z), \bar{y}_M(z)$ выполняется следующее свойство

$$\left(\frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi^2 k}\right)^2 = \det(H_q) \quad \textit{(правило Феникса)},$$

где $\bar\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \bar x_M(z)\bar y'_M(z) - \bar x'_M(z)\bar y_M(z) \in C$, *а* (H_q) - *матрица квадратичного полинома* $H_q(x, y, \bar\alpha, \bar\beta, \bar\delta)$.

Доказательство. Эпиморфизм $\varphi : \widetilde\Phi_q \to \widetilde{W}_{q,k}$ и следствие предложения 2 позволяют поднять произвольный максимальный идеал $M \in \mathrm{Spec}_C\widehat{W}_{q,k}$ до $\widetilde{M} \in \mathrm{Spec}_C\widetilde{W}_q[q^{-1}]$. Поэтому $\bar x_M(z) = \bar x_{\widetilde M}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_{\widetilde M}(x)$, $\bar y_M(z) = \bar y_{\widetilde M}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_{\widetilde M}(y)$, $\bar\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_{\widetilde M}(\alpha)$, $\bar\beta \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_{\widetilde M}(\beta)$, $\bar\delta \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_{\widetilde M}(\delta)$ и комплексная кривая $\bar x_{\widetilde M}(z)$, $\bar y_{\widetilde M}(z)$ лежит на аффинной кривой $H_q(x, y) = 0$ (см. (22)).

Но тогда из формулы (19) и третьего определяющего соотношения C-алгебры $\widehat{W}_{q,k}$ последовательно получаем

$\sigma^4/|(H_q)| = w^2/\left(\frac{\bar q}{\sigma^2 q}\right)^3 = (4\pi^2 k)^2$, $\left(\frac{\sigma^2}{4\pi^2 k}\right)^2 = \det(H_q)$,

что доказывает последнее утверждение теоремы 3.

3.4. *Заключительный штрих (идеалы-невидимки).* Породим x и y дифференциальную C-подалгебру в $\widehat{W}_{q,k}$. Обозначим её $R_{q,k}$. Ясно, что $\mathrm{Spec}_C R_{q,k} \supseteq \mathrm{Spec}_C\widehat{W}_{q,k}$. Согласно замечанию 1 из равенства $\mathrm{RNG}_C\widetilde{W}_q = 1$ последовательно следуют $\mathrm{RNG}_C\widetilde{W}_q[q^{-1}] = 1$, $\mathrm{RNG}_C\widetilde\Phi_q = 1$, $\mathrm{RNG}_C\widehat{W}_{q,k} = 1$, поэтому ранг C-подалгебры $R_{q,k}$ также равен 1 и её спектр аналитичен.

Теорема 1'. *Для произвольного максимального идеала* $M \in \mathrm{Spec}_C R_{q,k}$ *степенные ряды* $\bar x_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_M(x)$, $\bar y_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_M(y)$ *задают голоморфные функции, определяющие комплексную кривую* $(\bar x_M(z), \bar y_M(z))$, *лежащую на одной из семейства проекций плоских сечений квадратичной поверхности* $q(x, y) = z^2$ *на плоскость* Oxy *параллельно оси* Oz.

Доказательство. Так как $\sigma' = 0$ $(\sigma \stackrel{\text{def}}{=} xy' - x'y)$, то $\bar\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_M(\sigma) \in C$.

Если $\bar\sigma = 0$, то определитель Вронского $\begin{vmatrix} \bar x_M(z) & \bar y_M(z) \\ \bar x'_M(z) & \bar y'_M(z) \end{vmatrix}$ равен нулю и степенные ряды $\bar x_M(z)$, $\bar y_M(z)$ линейно зависимы и кривая $(\bar x_M(z), \bar y_M(z))$ лежит на прямой, проходящей через начало координат.

Если $\bar\sigma \neq 0$, то идеал M можно считать максимальным идеалом локализации $R_{q,k}[\sigma^{-1}]$. Но как мы видели в пункте 2.1 $R_{q,k}[\sigma^{-1}]$ содержит элемент $w \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}/\sigma$, для которого $x'' = -w \cdot x$, $y'' = -w \cdot y$.

Если $\bar w_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_M(w)$ - нулевая голоморфная функция, то $\bar x''_M(z) = 0 = \bar y''_M(z)$ и кривая $(\bar x_M(z), \bar y_M(z))$ лежит на некоторой прямой, что соответствует проекциям на Oxy сечений поверхности $q(x, y) = z^2$ плоскостями, параллельными оси Oz.

Если $q(\bar x_M(z), \bar y_M(z))$ - нулевая голоморфная функция, то кривая $(\bar x_M(z), \bar y_M(z))$ лежит на сечении нашей квадратичной поверхности плоскостью $z = 0$.

Если и $\bar w(z) \neq 0$, и $q(\bar x_M(z), \bar y_M(z)) \neq 0$, то выберем точку z_0 (как можно ближе к 0) так, чтобы $\bar w_M(z_0) \neq 0$, $q(\bar x_M(z_0), \bar y_M(z_0)) \neq 0$. Тогда сквозной C-гомоморфизм $R_{q,k} \to \widetilde\psi_M(R_{q,k}) \to \widetilde\psi_M(R_{q,k})|_{z=z_0} = C$ является эпиморфизмом и его ядро является некоторым максимальным идеалом $N \in \mathrm{Spec}_C R_{q,k}$, для которого степенные ряды $\bar x_N(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_N(x)$, $\bar y_N(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde\psi_N(y)$ задают те же голоморфные функции, что и $\bar x_M(z)$, $\bar y_M(z)$. Но $\bar w_N(0) = \bar w_M(z_0) \neq 0$ и $q(\bar x_N(0), \bar y_N(0)) = q(\bar x_M(z_0), \bar y_M(z_0)) \neq 0$. Поэтому мы можем считать N максимальным идеалом локализации $R_{q,k}[\sigma^{-1}, w^{-1}, q^{-1}]$, которая совпадает с $\widehat{W}_{q,k}$, т.е. для кривой $(\bar x_N(z), \bar y_N(z))$ мы можем воспользоваться утверждением теоремы 3. Благодаря выбору точки z_0 кривые $(\bar x_M(z), \bar y_M(z))$ и $(\bar x_N(z), \bar y_N(z))$ локально совпадают. Теорема 1' полностью доказана.

Замечание 3. С алгебраической точки зрения, чтобы поставить заключительную точку, хорошо было бы для подалгебры $R_{q,k}$ в $\widehat{W}_{q,k}$, дифференциально порожденной x, y, указать все ее определяющие соотношения. Главные из них сразу бросаются в глаза

$$\sigma'_{0,1} = 0,\ \ \sigma^4_{0,1} \cdot (q(x, y))^3\sigma^2_{1,2} = (4\pi^2 k)^2(\bar q(x, y, x', y'))^3 \tag{23}$$

где $\sigma_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x^{(i)} & y^{(i)} \\ x^{(j)} & y^{(j)} \end{vmatrix}$, так как $\sigma_{0,1} \cdot w = \sigma_{1,2}$. Более того, мы уже знаем, что все другие соотношения имеют вид $a = 0$, где a –"делитель нуля", точнее $(\sigma_{1,2} \cdot q \cdot \bar q)^m \cdot a = 0$ по модулю дифференциальных соотношений (23). Но вопрос о базисе дифференциального идеала таких "делителей нуля" пока открыт.

4. Время – вещь чрезвычайно гибкая (реализация и материализация). Действительный случай уравнений Браге-Декарта-Уоттона – это Клондайк, Эльдорадо для разного толка авантюристов, горлопанов-крикунов, любителей “физического смысла” (“пиара”, “динамита” и “капусты”). Мы не имеем с ними ничего общего и ограничимся сугубо математической стороной дела. Наша точка зрения (our standpoint): комплексная версия - более содержательна и позволяет продвигать идеи и развивать взгляды Гюйгенса (Ферма, Декарта, Коши, Вейерштрасса, Софьи Ковалевской, Пуанкаре, Миньковского, Больцмана) на волновую природу

ВРЕМЕНИ.

4.1. *Реставрация.* Хотя выбор системы координат (и числового множителя перед $q(x,y)$) оказывает влияние на трактовку правила Феникса, но сами уравнения Браге-Декарта-Уоттона сохраняют свой вид. Существенно более важно то, что одна и та же кривая $H(x,y)=0$ может задаваться различными уравнениями. Но если $q(x,y)$ - неприводимый в $\mathbf{C}[x,y]$ квадратичный многочлен, то (как без труда проверит читатель) различные уравнения $q(x,y)=(\alpha x+\beta y+\delta)^2$ задают разные кривые, а нормировку для многочлена $q(x,y)$ можно выбрать так, чтобы $\det(q)$ был равен единице.

Остается вопрос: “Как модифицировать комплексные версии уравнений, когда $q(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$ и α,β,δ в $H_q(x,y,\alpha,\beta,\delta)=0$ пробегают действительные (или чисто мнимые) числа, чтобы не разбираться с “псевдокомплексными их решениями”?”

Ответ на него, на наш взгляд, крайне прост. Глядя на соотношение (19), мы видим, что $\det(H_q)=(\sigma^4/w^2)\cdot(\bar{q}/(\sigma^2 q))^3$. Следовательно, знаки $\det(H_q)$ и $\frac{\bar{q}(x,y,x'y')}{\sigma^2 q(x,y)}$ совпадают на любых действительных решениях $x(t),y(t)$. Поэтому под знак корня квадратного (см. уравнения п.п. 1.1, 1.3 - 1.5) надо формально добавить знак модуля. Следовательно, нормализационная версия уравнений Браге-Декарта-Уоттона в действительном случае (когда $q(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$) должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -4\pi^2 k\sqrt{|\bar{q}(x,y,x'y')/((xy'-x'y)^2\cdot q(x,y))|}^3\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ (k\in\mathbb{R}). \tag{24}$$

Вот и всё. Сказанного в п. 3 вполне достаточно, чтобы не давать больше никаких комментариев для специалистов по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

4.2. *Правила отбора траекторий по Тихо Браге.* Первый закон Кеплера гласит: “Планеты движутся по эллипсам вокруг солнца, которое находится в одном из фокусов траектории.”

Свое отношение (к вопросу о первичности метрики или меры) [10] к понятиям директриса и фокус мы уже высказывали в работах [3], [10]. Однако, слова “эллипсы” и “вокруг” до сих пор вполне себе актуальны. [11] Их можно формализовать на языке матрицы (H) и уравнения $H(x,y)=0$, определяющего траектории.

Правило действительной координатизации. Уравнение $H(x,y)=0$ надо выбирать так, чтобы $\det H$ был положителен.

Первое правило. Главный минор второго порядка матрицы (H) больше нуля $h_{11}h_{22}-h_{12}^2>0$.

Второе правило. Начало координат лежит внутри кривой второго порядка: $\det(H)\cdot h_{33}>0$.

---

[10] К сожалению, наша попытка выставить метрику за дверь привела в данной статье к тому, что она под видом “нормализации” $\bar{q}(x,y,x',y')/q(x,y)$ пролезла в уравнение (24).

[11] Главный недостаток действительной версии (24) уравнений Браге-Декарта-Уоттона состоит в том, что у них существуют решения (достаточно положить $q(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2 \quad (a\neq 0\neq b)$), на которых “за конечное время” скорость достигает сколь угодно больших значений. Жизнь показывает, что в этом случае вердикт уважаемых экспертов-детерминистов: “Уравнения (24) *нефизичны...*” – невозможно преодолеть.

Третье правило. На эллипсе есть действительные точки: $h_{11} < 0, h_{22} < 0$.

Замечание 4. Прямая проверка показывает, что если $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0$, $h_{33} > 0, h_{11} < 0$, то $\det(H) > 0$.

На наш взгляд второе правило доминирует: если решение $x(t), y(t)$ уравнений (24) лежит на траектории, для которой $h_{33} \cdot \det(H) > 0$, то "объект", движущийся по ней, живет бесконечно долго. Если же условие $\det(H) \cdot h_{33} > 0$ нарушается, то ортодоксальный кеплеров наблюдатель (в начале координат), приверженец детерминированного (действительного, "реального") взгляда на время, сталкивается с непонятными, необъяснимыми вещами: наблюдаемый объект может

а) в какой-то момент времени неожиданно аннигилировать (как шаровая молния);

б) внезапно ускориться и прямо на глазах испариться, не достигнув края экрана радара (неопознанные летающие объекты);

в) тихо, спокойно, не обращая внимания на окружающие силовые поля, с достоинством удалиться за границы зоны наблюдения (электро-магнитная левитация).

4.3. *Картезианская версия второго и третьего законов Кеплера.* Из опубликованного Кеплером мы можем заключить, что обсерватория Тихо Браге занималась проверкой гипотез, детали которых на данный момент описываются уравнениями (24) (вероятно при $q(x,y) = x^2 + y^2$, см. также уравнения в пп. 1.1, 1.3, 1.4). Без сомнения Тихо Браге было известно значение "солнечной постоянной" $k = a^3/T^2$, где a – большая полуось эллипса (траектории движения планеты), а T-период ее обращения вокруг Солнца. Вызывает удивление, что эта фундаментальная константа k отсутствует во втором и третьем законах Кеплера. Более того, во втором – из них нет ни малейшего намека на правило Феникса даже в форме соотношения $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = |\delta_1|/|\delta_2|$ (при $q(x,y) = x^2 + y^2$, $H_q(x,y) = (\alpha x + \beta y + \delta)^2 - q(x,y)$ справедливо равенство $\det(H_q) = \delta^2$), ведь $|\delta|$ – это фокусное расстояние кривой $H_q(x,y) = 0$. Формула $\sigma^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot |k| \cdot |\delta|$ была бы как нельзя более кстати в формулировке второго закона. В популярной литературе встречаются утверждения, что Кеплеру не очень доверяли в обсерватории. Возможно поэтому он не был посвящён в тайны, секреты, детали проводимых исследований.

Рассмотрим ещё раз комплексное 5-мерное аффинное пространство $\mathbf{C}^5$ с координатными фазовыми переменными w, x, y, x', y' и зададим четырёхмерное аффинное (неразложимое) подмногообразие $X_{q,k}$ одним уравнением

$$((xy' - x'y)^2 \cdot q(x,y))^3 w^2 = (4\pi^2 k)^2 (\bar{q}(x,y,x',y'))^3 \ (k \in \mathbf{C}). \tag{25}$$

Как мы видели выше, главное открытое множество ($\sigma^2 \cdot q \cdot \bar{q} \neq 0$) в $X_{q,k}$ – это спектр максимальных идеалов $\widehat{W}_{q,k}$ и степенные ряды $\bar{x}_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(x)$, $\bar{y}_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}(y)$, $\bar{w}_M(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(w)$ определяют голоморфные функции связанные соотношением (25).

Если $q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y], k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathrm{i}\mathbb{R}$) и $M - \mathbb{R}$ - точка спектра $X_{q,k}$, то все эти ряды имеют действительные коэффициенты (см. равенства (17), (20)), т.е. $\bar{x}_M(t), \bar{y}_M(t), \bar{w}_M(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ являются бесконечно дифференцируемыми действительными функциями – решениями комплексной версии уравнений Браге-Декарта-Уоттона. С другой стороны, для любой точки $(x_0, y_0, x_0', y_0') \in \mathbb{R}^4$ $(\sigma \cdot q \cdot \bar{q} \neq 0)$ и $w_{\pm} = \pm 4\pi^2 k \sqrt{|\bar{q}/(\sigma^2 q)|^3}$ – это либо решения уравнения (25), либо уравнения

$$((xy' - x'y)^2 q(x,y))^3 w^2 = -(4\pi^2 k)^2 (\bar{q}(x,y,x',y'))^3, \tag{26}$$

которое задаёт многообразие $X_{q,k\mathrm{i}}$, и определяет R - точку $M \in \mathrm{Spec}\widehat{W}_{q,k\mathrm{i}}$ на многообразии $X_{q,k} \cup X_{q,k\mathrm{i}}$, т.е. $\bar{x}_M(t)$, $\bar{y}_M(t)$, $\bar{w}_M(t)$ являются решениями задачи Коши для уравнений $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \pm 4\pi^2 k \sqrt{|\bar{q}/(\sigma^2 q)|^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(Верно и обратное: любая R-точка объединения $(X_{q,k} \cup X_{q,k\mathrm{i}}) \setminus (X_{q,k} \cap X_{q,k\mathrm{i}})$ $(k \in \mathbb{R})$ имеет вид $x_0, y_0, x_0', y_0', w_0 = \pm 4\pi^2 k \sqrt{|\bar{q}/(\sigma^2 q)|^3}$ $((\sigma \cdot q(x,y) \cdot \bar{q}(x,y,x',y'))|_{x=x_0, y=y_0, x'=x_0', y'=y_0'} \neq 0)$).

Теорема 4. *Для любого начального условия* $(x_0, y_0, x_0', y_0') \in \mathbb{R}^4$ $(x_0y_0' - x_0'y_0 \neq 0, q(x_0, y_0) \neq 0,\ \bar{q}(x_0, y_0, x_0', y_0') \neq 0)$ *локальное решение* $x(t), y(t)$ *уравнения*

$$\frac{d^2.}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{4\pi^2 k}{d^3}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left(k \in \mathbb{R}, d \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{|q(x,y)|}{|\bar{q}(x,y,x',y')|/(xy'-x'y)^2}}\right)$$

а) является бесконечно дифференцируемым (и даже аналитическим);

б) лежит на одной из квадратичных кривых $H_q(x,y) = 0$ $(H_q(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x + \beta y + \delta)^2 - q(x,y) \quad ((\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3 \cup \mathrm{i}\mathbb{R}^3))$;

в) $(x(t)y'(t) - x'(t)y(t))^2 = 4\pi^2|k| \cdot \sqrt{|\det(H_q)|}$ *(правило Феникса);*

Если же $x(t), y(t)$ *лежит на эллипсе, удовлетворяющем второму правилу отбора, то*

г) $k > 0$;

д) область определения аналитического продолжения ростка $x(t), y(t)$ *– это вся действительная прямая* $(-\infty, \infty)$;

е) $k = \left(\frac{\min d(t) + \max d(t)}{2}\right)^3 / T^2$, *где* T *- период обращения "планеты" вокруг начала координат.*

Здесь мы вынуждены прервать наше повествование, чтобы ненароком не навязать читателю "авторское" [12] мнение об успехах аналитической геометрии и дифференциальной алгебры в первой половине XVII века: дифференциально-алгебраическая версия эфира и воронок Декарта, ферматистская модель корпускулярной оптической среды. Пусть всё идёт, как идёт ("let sleeping dog lie", как говорят в Кэмбридже).

Подытожим сказанное словами Владимира Маяковского: "Время – вещь необычайно длинная, были времена – прошли былинные."

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Razmyslov Yu.P.* An explanation (field equations in accordance with Tycho Brahe). // Journal of Mathematical Sciences. 2013, v. 191, N 5, 2013, стр. 726–742.
2. *Герасимова О.В.* Дифференциально-алгебраические и геометрические основы центральной динамики на кривых второго порядка. // Диссертация на соискание степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.06/ Ф.Г.Б.О.У. ВПО Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, мех.-мат. фак. – М., 2014. – 86 л.: 500.00.
3. *Размыслов Ю.П.* Законы катящихся симплексов. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. N 6. 38–42.
4. *Герасимова О.В., Размыслов Ю.П.* Неаффинных дифференциально–алгебраических кривых не существует. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. N 3. 3–8.
5. *Герасимова О.В., Размыслов Ю.П.* Фробениусовы дифференциально–алгебраические универсумы на комплексных алгебраических кривых. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. N 4. 3–8.
6. *Pogudin G.A.* The primitive element theorem for differential fields with zero derivation on the base field // Journal of Pure and Applied Algebra, 2015. v. 219. N 9. 4035–4041.
7. *Pogudin G.A.* A Differential Analog of the Noether Normalization Lemma. // International Mathematics Research Notices, 2016, v. 191, N 00, 2–23.
8. *Герасимова О.В., Погудин Г.А., Размыслов Ю.П.* Rolling simplexes and their commensurability, III (соотношения Капелли и их применение в дифференциальных алгебрах). // Фундаментальная и прикладная математика, том 19, выпуск 6, 2014, стр. 7-24.
9. *И. Р. Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии. М.: МЦНМО, 2007.
10. *Размыслов Ю.П.* Роллинг и соизмеримость симплексов. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. N. 5. 55–58.

Представлено к печати 21/XII-2018

[12] Риманн: *"Доказать – это сделать состояние ума собеседника, близким к твоему собственному."*