

COGITO EGRO SUM

*“Мы реалисты, а не мистики.
Нам в мушкетёрах равных нет –
Ведь мы, гвардейцы, в Новой Физике
Настроим Старый инструмент.”*

Из гимна ЛВМ

ЛИКБЕЗ

(Там где чисто и светло)

Глава 3.
Соотношения Капелли
и их применение
в дифференциальной алгебре.

3.1 Простые и максимальные идеалы в счетномерных коммутативно-ассоциативных алгебрах над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Обозначим $\bar{k}$ алгебраическое замыкание поля k .

Предложение 3.1.1. *Для любой коммутативно-ассоциативной k -алгебры A при ненулевом k -гомоморфизме $\varphi : A \rightarrow \bar{k}$ k -подалгебра $\varphi(A)$ в $\bar{k}$ является подполем, в частности ядро $\text{Ker} \varphi$ - простой идеал в k -алгебре A .*

Доказательство. Любой ненулевой элемент $\varphi(a)$ в $\bar{k}$ является алгебраическим над k , через $f(t) \in k[t]$ обозначим его минимальный многочлен. Так как в $\bar{k}$ нет делителей нуля, $f(0) \neq 0$. Следовательно, k -подалгебра, порожденная элементом $\varphi(a)$ содержит единицу поля k . Более того, записав многочлен $f(t)$ в виде $f(0) + t \cdot g(t)$, из равенства $f(0) + \varphi(a) \cdot g(\varphi(a)) = 0$ заключаем, что $-g(\varphi(a))/\varphi(0)$ обратный элемент к $\varphi(a)$, содержащийся в k -подалгебре $k[\varphi(a)]$ поля $\bar{k}$. $\square$

Предложение 3.1.2. *Любая простая коммутативно-ассоциативная алгебра A над полем k содержит единичный элемент и является полем.*

Доказательство. Так как A — простая k -алгебра, то в ней ненулевое умножение, и в A нет идеалов кроме нулевого и самой A . Следовательно, для любого ненулевого элемента $a \in A$ идеал $A \cdot a \stackrel{\text{def}}{=} \{d \cdot a | d \in A\}$ или равен нулю, или совпадает с A . Если $A \cdot a = 0$, то одномерное пространство ka является ненулевым идеалом, то есть $ka = A$. Однако, в этом случае $A \cdot A = A \cdot ka = A \cdot a = 0$, то есть в A нулевое умножение. Таким образом, $A \cdot a = A$ для всякого $a \neq 0$. Поэтому $a \in A \cdot a$ и $e \cdot a = a$ для некоторого элемента $e \in A$. Но тогда $\forall b \in A = A \cdot a$ имеет место представление $b = c \cdot a$, откуда $e \cdot b = c \cdot e \cdot a = b$. Значит, e — единичный элемент в A . Более того, $e \in A = A \cdot a$, то есть $e = d \cdot a$ для некоторого $d \in A$, т.е. любой ненулевой элемент в A имеет обратный. $\square$

Теорема 3.1.1. *Пусть M — максимальный идеал коммутативно-ассоциативной k -алгебры с единицей A . Пусть также k -размерность A меньше мощности поля k . Тогда факторалгебра A/M является полем, в котором любой элемент алгебраичен над k .*

Доказательство. Рассматривая вместо A алгебру A/M , можно считать A полем и M нулевым идеалом. Рассмотрим произвольный $a \in A$. Мощность множества $\{\frac{1}{a-\alpha} | \alpha \in k\}$ превосходит $\dim_k A$. Значит, между элементами этого множества есть линейная зависимость над k :

$$0 = \frac{\beta_1}{a - \alpha_1} + \dots + \frac{\beta_n}{a - \alpha_n} = \frac{p(a)}{(a - \alpha_1) \dots (a - \alpha_n)}$$

где $p(x) \in k[x]$. Таким образом, $p(a) = 0$, то есть a алгебраичен над k . $\square$

Следствие 3.1.1. *Пусть $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ и A счетномерна над k . Тогда для любого максимального идеала $M \subset A$ поле A/M изоморфно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.*

Следствие 3.1.2. Пусть размерность k -алгебры A меньше мощности k . Для любого ненильпотентного элемента $a \in A$, существует такой k -гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow \bar{k}$, при котором $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим цепочку k -гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\varepsilon_a} A[a^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_M} A[a^{-1}]/M \xrightarrow{\varepsilon} \bar{k},$$

где $A[a^{-1}]$ — локализация алгебры A по ненильпотентному элементу a , M — произвольный максимальный идеал k -алгебры с единицей $A[a^{-1}]$, ε — любое вложение алгебраического расширения $A[a^{-1}]/M$ поля k в $\bar{k}$. Тогда для k -гомоморфизма $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \circ \varepsilon_M \circ \varepsilon_a$:

$$\varphi(a) \cdot (\varepsilon \circ \varepsilon_M(a^{-1})) = \varepsilon \circ \varepsilon_M(\varepsilon_a(a) \cdot a^{-1}) = \varepsilon \circ \varepsilon(a/a) = 1.$$

Следовательно, $\varphi(a) \neq 0$. □

Следствие 3.1.3. Пересечение всех простых идеалов k -алгебры A , размерность которой строго меньше мощности поля k , совпадает с наибольшим в A идеалом, состоящим из нильпотентных элементов.

3.2 Коммутативные алгебры с одним дифференцированием.

Определение 3.2.1. k -линейное отображение D коммутативно-ассоциативной k -алгебры A в себя называется *дифференцированием*, если оно удовлетворяет тождеству Лейбница: $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. Алгебра с выделенным дифференцированием называется *дифференциальной*. Результат применения дифференцирования к элементу a мы будем обозначать через a' .

Полилинейными сигнатурными операциями дифференциальной алгебры являются билинейное умножение $*$: $A \otimes_k A \rightarrow A$ и линейная унарная операция D : $A \rightarrow A$.

Определение 3.2.2. Элемент $a \in A$ называется константой, если $a' = 0$.

Легко видеть, что константы образуют подалгебру. В случае когда A — поле, константы образуют подполе.

Определение 3.2.3. Гомоморфизмом дифференциальной k -алгебры A_1 относительно k -дифференцирования D_1 в дифференциальную k -алгебру A_2 относительно D_2 называется k -линейное отображение $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$, при котором

$$\varphi(D_1 \times a_1) = D_2 \times \varphi(a_1), \quad \varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2) \quad (a_1, a_2 \in A_1).$$

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением дифференциальных алгебр над полем действительных и комплексных чисел.

Пример 3.2.0. $A = k[[t]]$ — алгебра формальных степенных рядов от переменной t относительно стандартного дифференцирования $D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}$. Эта алгебра не содержит делителей нуля, а её поле частных совпадает с $k((t))$, алгеброй формальных рядов Лорана. В алгебрах $k[[t]]$, $k((t))$ нет нетривиальных констант, т.е. если $\frac{d}{dt}f(t) = 0$, то $f(t) \in k$. В алгебре A все идеалы являются главными (нетривиальные имеют вид $A \cdot t^i$ ($i \in \mathbb{N}$)), а так как основное поле k имеет нулевую характеристику ($D \times t^i = i \cdot t^{i-1} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots$) в A нет нетривиальных дифференциальных идеалов. Таким образом, дифференциальная алгебра $k[[t]]$ является примером простой дифференциальной алгебры с единицей. Особо отметим, что любое дифференцирование алгебры $k[[t]]$ имеет вид $f(t) \frac{d}{dt}$, ($f(t) \in k[[t]]$).

Предложение 3.2.1. Если $\text{char } k = 0$, то ряды Лорана $f_1(t), \dots, f_n(t) \in k((t))$ линейно зависимы над k тогда и только тогда, когда определитель

$$|f_1, \dots, f_n| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \dots & f'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \text{ равен нулю.}$$

Доказательство. Согласно предложению [7, глор. 2.8] элементы дифференциального поля линейно зависимы над полем констант тогда и только тогда, когда соответствующий определитель равен нулю. Так как поле констант рядов Лорана совпадает с основным полем, утверждение предложения следует отсюда напрямую. $\square$

Пример 3.2.1. $A = H(D)$ — алгебра всех голоморфных функций от переменной z , определенных в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$. Из элементарной теории функций одного комплексного переменного следует, что все такие функции бесконечно дифференцируемы относительно $\frac{d}{dz}$, непрерывны и в ε -окрестности любой точки $z_0 \in D$ ряд Тейлора любой такой функции сходится к ней самой. В частности, A не содержит делителей нуля и является областью целостности.

Пример 3.2.2. $A = k[x_1, \dots, x_n]$ ($k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) — алгебра многочленов от n переменных. Любое дифференцирование $D: A \rightarrow A$ однозначно определяется своими значениями на $x_1, \dots, x_n$. При этом, если $D \times x_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \in A$ ($i = 1, \dots, n$), то $D = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Пусть φ — произвольный дифференциальный k -гомоморфизм дифференциальной k -алгебры A относительно D в дифференциальную k -алгебру $k[[t]]$ относительно $\frac{d}{dt}$. Тогда степенные ряды $\varphi(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$) от переменной t являются формальными решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi(x_i)) &= (\varphi(D \times x_i) = \varphi(f_i(x_1, \dots, x_n))) = \\ &= f_i(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Из теоремы С.Ковалевской вытекает, что эти степенные ряды сходятся в некоторой окрестности нуля к решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

с начальным условием $x_i(0) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_i)|_{t=0}$.

Следствие 3.2.1. Пусть A — конечнопорожденная коммутативно-ассоциативная алгебра над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, D — произвольное её дифференцирование. Тогда для любого дифференциального k -гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ ($\varphi(D \times x) = \frac{d}{dt}\varphi(a)$) все степенные ряды $\varphi(a)$ (a пробегает A) сходятся в некоторой окрестности нуля поля $\mathbb{C}$.

Доказательство. Обозначим $a_1, \dots, a_m$ порождающие элементы алгебры A . Дифференцирование $D: A \rightarrow A$ полностью определяется своими значениями на $a_1, \dots, a_m$, которые полиномиально выражаются через $a_1, \dots, a_m$.

Зафиксируем многочлены $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_m]$, для которых

$$D \times a_i = f_i(a_1, \dots, a_m) \quad (i = 1, \dots, m)$$

Положим $\bar{D} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m f_i(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Эпиморфизм $\bar{\varphi} : k[x_1, \dots, x_m] \rightarrow A$, при котором

$\bar{\varphi}(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} a_i$ является гомоморфизмом дифференциальной алгебры $k[x_1, \dots, x_m]$ относительно дифференцирования $\bar{D}$ на дифференциальную k -алгебру A относительно D . Действительно, для любого $g \in K[x_1, \dots, x_m]$.

$$\bar{\varphi}(\bar{D} \times g(x_1, \dots, x_m)) = \bar{\varphi} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot f_i(x_1, \dots, x_m) \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x_1=a_1, \dots, x_m=a_m} \right) \cdot f_i(a_1, \dots, a_m) = D \times g(a_1, \dots, a_m) = D \times \bar{\varphi}(g).$$

Следовательно, как было отмечено в примере 3.2.3 степенные ряды $\varphi(\bar{\varphi}(x_i))$ ($i = 1, \dots, m$) сходятся в некоторой окрестности нуля. □

Пример 3.2.3. $A = C^\infty(a, b)$ — $\mathbb{R}$ -алгебра бесконечно дифференцируемых функций от одной действительной переменной t на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ относительно естественного дифференцирования $\frac{d}{dt}$. Очевидно, что в этой алгебре есть делители нуля, но в ней нет нильпотентных элементов. Несмотря на более чем четырехвековую традицию использования этой алгебры отыскания решений обыкновенных дифференциальных уравнений, она не является естественным объектом (в отличие от алгебр из примеров 0,1) для представления конечнопорожденных дифференциальных k -алгебр. Известно огромное количество примеров функций $x(t) \in C^\infty(a, b)$, для которых её ряд Тейлора в каждой точке $t_0 \in (a, b)$ не сходится к $x(t)$ ни в какой ε -окрестности t_0 . Например, ряд Тейлора функции $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sqrt{2^k}} \cos(2^k t)$ расходится в любой точке $t_0 \in (-\infty, \infty)$. Но и здесь теорема С.Ковалевской и следствие из нее позволяют нащупать подход в этом болоте.

Предложение 3.2.2. Пусть в каждой точке $t_0 \in (a, b)$ ряд Тейлора функций $x(t) \in C^\infty(a, b)$ не сходится к $x(t)$ ни в какой ε -окрестности t_0 . Тогда дифференциальная $\mathbb{R}$ -подалгебра, порождённая $x(t)$ изоморфна свободной дифференциальной алгебре ранга 1, то есть функции $x(t), x'(t), \dots, x^{(i)}(t)$ алгебраически независимы над $\mathbb{R}$.

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

Предложение 3.2.3. Рассмотрим конечнопорожденную дифференциальную подалгебру $A \subset C^\infty(a, b)$. Найдется интервал $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ такой, что для любого интервала $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ подалгебра $A|_{(a_2, b_2)}$ изоморфна $A|_{(a_1, b_1)}$.

Более того, алгебра $A|_{(a_1, b_1)}$ является областью целостности.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует цепочка интервалов $(a, b) \supset (a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \dots$ такая, что отображение сужения $A|_{(a_i, b_i)} \rightarrow A|_{(a_{i+1}, b_{i+1})}$ имеет нетривиальное ядро для всех i . Пусть A порождается элементами $a_1, \dots, a_n$. Через $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ будем обозначать свободную дифференциальную алгебру от n образующих (см. [4][стр. 9]). Каждому ограничению $A|_{(a_i, b_i)}$ соответствует идеал I_i — ядро эпиморфизма $f_i: \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow A|_{(a_i, b_i)}$, где $f_i(x_j) = a_j$. Заметим, что идеалы I_i образуют возрастающую цепь $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$. Однако, так как алгебра $C^\infty(a, b)$ не содержит нильпотентов, все I_i радикальны, что невозможно по теореме Ритта-Роденбуша ([4][теор. 7.1]).

Для доказательства второго утверждения предположим, что нашлись ненулевые $f, g \in A|_{(a_1, b_1)}$ такие, что $fg = 0$. Существует интервал $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ такой, что $f(x) \neq 0$ во всех $x \in (a_2, b_2)$. Тогда g лежит в ядре гомоморфизма сужения $A|_{(a_1, b_1)} \rightarrow A|_{(a_2, b_2)}$, что противоречит выбору (a_1, b_1) . □

3.3 Техника гомоморфизмов Тейлора.

В этом параграфе все рассматриваемые дифференциальные k -алгебры являются счетномерными и $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Обозначим через $\text{Spec}_k A$ спектр простых идеалов k -алгебры A . Согласно результатам раздела 3.1, для любого идеала $M \in \text{Spec}_k A$ фактор-алгебра A/M является полем, изоморфным $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольный k -гомоморфизм k -алгебры A в $\mathbb{C}$. Для любого элемента $a \in A$ определим степенной ряд $\tilde{\psi}(a) \in \mathbb{C}[[t]]$ по формуле:

$$\tilde{\psi}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \psi(D^i \times a) \frac{t^i}{i!},$$

где D — k -дифференцирование A .

Из этого определения немедленно следует, что

$$\tilde{\psi}(a_1 * a_2) = \tilde{\psi}(a_1) * \tilde{\psi}(a_2), \quad \tilde{\psi}(D \times a) = \frac{d}{dt} \tilde{\psi}(a)$$

для любых элементов a_1, a_2, a алгебры A . То есть k -линейное отображение $\tilde{\psi}: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ является k -гомоморфизмом дифференциальной k -алгебры A относительно k -дифференцирования D в дифференциальную $\mathbb{C}$ -алгебру степенных рядов $\mathbb{C}[[t]]$ относительно k -дифференцирования $\frac{d}{dt}$. Этот дифференциальный k -гомоморфизм мы будем называть гомоморфизмом Тейлора в точке $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}$.

Замечание. Очевидно, что любой дифференциальный k -гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ является гомоморфизмом Тейлора в точке $\psi = \varepsilon \circ \varphi$, где ε — канонический $\mathbb{C}$ -гомоморфизм $\mathbb{C}[[t]] \rightarrow \mathbb{C}$, при котором $\varepsilon(f(t)) \stackrel{\text{def}}{=} f(0)$. Действительно, если $\varphi(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{t^i}{i!}$, то

$$\tilde{\psi}(a) = \sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon \circ \varphi)(D^i \times a) \frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon\left(\frac{d^i}{dt^i} \varphi(a)\right) \frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{t^i}{i!} = \varphi(a)$$

Аналитический спектр. Для любого $M \in \text{Spec}_k A$ обозначим ψ_M k -гомоморфизм k -алгебры A на факторалгебру A/M , которая изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Тогда с точностью до комплексного сопряжения можно считать, что ψ_M — это k -гомоморфизм k -алгебры A в поле $\mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{\text{Spec}_k A}$ такое подмножество в $\text{Spec}_k A$, составленное из тех простых идеалов M , для которых при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ образ $\tilde{\psi}_M(A)$ состоит из рядов, сходящихся в некоторой ε -окрестности нуля поля $\mathbb{C}$. Оказывается, что k -гомоморфизмов $\psi_M \rightarrow \mathbb{C}$ ($M \in \overline{\text{Spec}_k A}$) достаточно много.

Теорема 3.3.1. Пусть A — конечнопорожденная дифференциальная k -алгебра относительно дифференцирования D . Тогда для любого ненильпотентного элемента $a \in A$ существует $M \in \overline{\text{Spec}_k A}$ такой, что $\psi_M(a) \neq 0$.

Доказательство. Локализация $A[a^{-1}]$ k -алгебры A по ненильпотентному элементу a имеет единичный элемент a/a и является конечно порожденной относительно D дифференциальной k -алгеброй. Пусть I -произвольный максимальный дифференциальный идеал. Тогда факторалгебра $B \stackrel{\text{def}}{=} A/I$ является простой дифференциальной k -алгеброй с единицей, в которой элемент $a + I$ обратим. Из теоремы Ю.П.Размыслова (см. [5]) следует, что B — область целостности и в B существует такой элемент b , что локализация $B[b^{-1}]$ имеет конечное число образующих, как коммутативно-ассоциативная (не дифференциальная) k -алгебра. Согласно следствию из теоремы С.Ковалевской для любого идеала $N \in \text{Spec}_k B[b^{-1}]$ при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_N: B[b^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ образ $\tilde{\psi}_N(B[b^{-1}])$ состоит из степенных рядов, сходящихся в некоторой ε -окрестности нуля поля $\mathbb{C}$. Следовательно, ядро M k -гомоморфизма

$$A \xrightarrow{\varepsilon_a} A[a^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_I} A[a^{-1}]/I = B \xrightarrow{\varepsilon_b} B[b^{-1}] \xrightarrow{\psi_N} \mathbb{C}$$

является простым идеалом из $\overline{\text{Spres}}_k A$ ($\tilde{\psi}_M = \tilde{\psi}_N \circ \varepsilon_b \circ \varepsilon_I \circ \varepsilon_a$), для которого $\psi_M(a)$ -обратимый элемент в $\mathbb{C}$, то есть $\psi_M(a) \neq 0$. $\square$

Лемма о нильпотентном элементе. Обозначим через $W(a_1, \dots, a_n)$ бесконечную матрицу, у которой в i -ой строке j -го столбца ($i = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n$) стоит элемент $D^i \times a_j$.

Лемма 3.3.1. Если самый верхний минор n -го порядка $|a_1, \dots, a_n|$ матрицы $W(a_1, \dots, a_n)$ является нильпотентным элементом в k -алгебре A , то и все остальные миноры n -го порядка матрицы $W(a_1, \dots, a_n)$ нильпотентны.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм дифференциальных алгебр $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$. Так как в $\mathbb{C}[[t]]$ нет нильпотентов, верхний $n \times n$ минор матрицы $W(\psi(a_1), \dots, \psi(a_n))$ равен нулю. Согласно предложению 1 параграфа 3.2, ряды $\psi(a_1), \dots, \psi(a_n)$ линейно зависимы над k , то есть любой $n \times n$ минор матрицы $W(\psi(a_1), \dots, \psi(a_n))$ равен нулю. Таким образом, все $n \times n$ миноры $W(a_1, \dots, a_n)$ лежат в ядре любого гомоморфизма в $\mathbb{C}[[t]]$. Такое возможно только для нильпотентных элементов. Действительно, для ненильпотентного элемента a следствие 2 из раздела 3.1 гарантирует наличие гомоморфизма k -алгебр $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$, при котором $\varphi(a) \neq 0$. Теперь достаточно рассмотреть соответствующий гомоморфизм Тейлора $\tilde{\varphi}$. $\square$

Замечание. При $n = 1$ из этой леммы вытекает, что над полями нулевой характеристики нильпотентные элементы при дифференцировании переходят в нильпотентные. Комбинаторное доказательство этого факта приведено в [4][лемма 1.7].

3.4 Соотношения Капелли и теорема о ранге.

Определение 3.4.1. k -алгебра A сигнатуры Ω называется *первичной*, если равенство $(J_1, J_2) = 0$ влечет $J_1 = 0$ или $J_2 = 0$ и *полупервичной*, если из равенства $(J, J) = 0$ следует, что $J = 0$ для любых J, J_1, J_2 идеалов алгебры A .

Это определение можно проинтерпретировать следующим образом. Алгебра A первична, если для любых $a, b, a_i \in A$, где $i \in (1, n)$, существует полилинейный по a, b полином $p(a, b, a_i)$ такой что

$$p(a, b, a_i) = a_1 \cdot \dots \cdot a_i \cdot a \cdot a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_j \cdot b \cdot a_{j+1} \cdot \dots \cdot a_n \neq 0$$

Алгебра A полупервична, если для любого $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ существует моном, в котором a встречается n раз, $\dots a \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \neq 0$.

Следуя за [2][§3] введем понятие центроида Мартиндейла. Пусть A первичная k -алгебра сигнатуры Ω и $D = D(A)$ — связанная с ней ассоциативная подалгебра в $\text{End}_k A$. Пусть P — инъективная оболочка D -модуля A , обозначим $E = \text{End}_D P$ алгебру всех эндоморфизмов D -модуля P , а $Q = EA$ — D -подмодуль в P . Известно, что в таком случае ограничение ρ действия алгебры E на D -модуль Q коммутативно. Значит, алгебра $C = E/\text{Ker } \rho$ коммутативна, ее мы и называем *центроидом Мартиндейла*. Мы можем продолжить все операции Ω по C -линейности с алгебры A на Q и наделить Q структурой C -алгебры. Тогда C -алгебру Q сигнатуры Ω назовем *центральной замыканием* алгебры A .

Предложение 3.4.1 ([2], 3.2). *Если A — первичная k -алгебра сигнатуры Ω , то центроид $C(A)$ является полем, $Q(A)$ — первичной K -алгеброй и C -алгебра Q характеризуется тремя свойствами*

1. $Q = CA$;
2. произвольный ненулевой D -подмодуль в Q имеет ненулевое пересечение с A ;
3. любой частичный D -эндоморфизм κ ненулевого идеала J алгебры A в A однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на J совпадает с κ .

Для формулировки теоремы о ранге нам понадобятся следующие определения.

Определение 3.4.2. Пусть A обозначает k -алгебру сигнатуры Ω , а F — абсолютно свободную k -алгебру той же сигнатуры со свободными образующими $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots)$. Любой полином $d_k(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ из алгебры F , который полилинеен и кососимметричен относительно $x_1, \dots, x_k$, мы называем полиномом Капелли порядка k . Пусть V — произвольное k -подпространство в A ; будем говорить, что на V выполняются все тождества Капелли порядка k , если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов $v_1, \dots, v_k \in V, a_1, \dots, a_l \in A$ в алгебре A выполняется равенство

$$d_k(v_1, \dots, v_k, a_1, \dots, a_l) = 0.$$

Определение 3.4.3. Рангом k -линейного подпространства V относительно алгебры A назовем наименьшее число k , для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k . Будем обозначать это число $\text{rank}(A, V)$.

Теорема 3.4.1 (о ранге). *Пусть V — k -подпространство в первичной k -алгебре A сигнатуры Ω . Если $\text{rank}(A, V) < \infty$, то в центральном замыкании $Q(A)$ алгебры A*

$$\dim_{C(A)} C(A)V = \text{rank}(A, V) - 1.$$

k -алгебра A полилинейной сигнатуры Ω , среди операций которой есть не только унарные, называется *простой*, если она первична и в ней нет нетривиальных идеалов.

В этом случае $D(A)$ -модуль A неприводим и для любого ненулевого элемента c из центроида Мартиндейла $C(A)$ ненулевой подмодуль $c \cdot A$ в $Q(A)$ также неприводим над $D(A)$ и в силу свойства 2 предложения должен иметь ненулевое пересечение с A . Следовательно, $c \cdot A$ совпадает с A и $c: A \rightarrow A$ — это эндоморфизм неприводимого $D(A)$ -модуля A . По лемме Шура все такие эндоморфизмы в $\text{End}_K A$ образуют тело, а так как в Ω есть неунарные операции, то это тело должно быть коммутативным. Это поле эндоморфизмов $D(A)$ -модуля A принято называть центроидом K -алгебры A . Мы будем обозначать его C_A .

Следствие 3.4.1. *Пусть V — k -подпространство в простой k -алгебре A , в сигнатуре Ω которой есть не только унарные операции. Если $\text{rank}(A, V) < \infty$, то размерность пространства $C_A \cdot V$ над центроидом C_A k -алгебры A равна $\text{rank}(A, V) - 1$.*

Разумеется все эти утверждения, определения, понятия допускают истолкование применительно к коммутативно-ассоциативным дифференциальным k -алгебрам, сигнатура которых состоит из одной билинейной операции — умножения $*$ и одной унарной операции — дифференцирования $'$.

Для любого k -подпространства V дифференциальной k -алгебры A рассмотрим матрицу $M(A, V)$, столбцы которой пронумерованы элементами $v \in V$, а в i -ой строке этого

столбца стоит $v^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Тогда неравенство $\text{rank}(A, V) < \infty$ означает, что все миноры порядка $1 + m = \text{rank}(A, V)$ этой матрицы равны нулю, а какой-то минор m -го порядка нулю не равен. Более того, если $v_1, \dots, v_m \in V$ — это номера столбцов этого не равного нулю минора, то $v_1, \dots, v_m$ можно выбрать в качестве базиса C_A -подпространства $C_A \cdot V$ в $Q(A)$. Остается разобраться с понятиями первичности и полупервичности применительно к дифференциальным k -алгебрам. Первичность означает, что для любых двух ненулевых элементов a, b алгебры A найдутся такие натуральные числа i, j , что $a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$ (см. примеры (параграф 3.2)). Более того:

Лемма 3.4.1. *Дифференциальная алгебра A является первичной тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in A$ найдется такое n , что $a^{(n)}b \neq 0$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Пусть A первична, а числа i и j таковы, что $a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$, причем среди возможных пар (i, j) выберем пару с наименьшей суммой, а среди таких пар выберем пару с наименьшим j . Пусть $j > 0$. Тогда $a^{(i)}b^{(j-1)} = 0$, то есть $(a^{(i)}b^{(j-1)})' = a_{(i+1)}b^{(j-1)} + a^{(i)}b^{(j)} = 0$. Значит $a_{(i+1)}b^{(j-1)} = -a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$, что противоречит минимальности j . Таким образом, $j = 0$, что и требовалось. $\square$

Из указанного выше предложения немедленно следует

Теорема 3.4.2. *Если дифференциальная k -алгебра A является областью целостности и Q_A — ее классическое тело частных, то центроид Мартиндейла $C(A)$ дифференциальной алгебры A совпадает с подполем констант поля Q_A , т.е. $C(A)$. Более того, центральное замыкание $Q(A)$ совпадает с $C(A) \cdot A$.*

Последние результаты Глеба Погудина (см. [6] или Дополнение А) показывают, что первичные дифференциальные коммутативно-ассоциативные k -алгебры не обязаны быть областями целостности. В частности, дифференциальная алгебра над полем рациональных чисел, заданная одним дифференциальным образующим x и одним дифференциальным соотношением $x^2 = 0$ является первичной, но все её элементы нильпотентны. Так что теорема о ранге сохраняет свою актуальность и для класса дифференциальных алгебр.

Что же касается простых дифференциальных алгебр, то здесь дело обстоит совершенно идеально. Из результатов Ю.П. Размыслова (см. [5], [2]) вытекает следующая

Теорема 3.4.3. *Любая простая дифференциальная коммутативно-ассоциативная k -алгебра A ($\text{char } k \neq 2$) содержит единицу. Более того, если $\text{char } k = 0$, то алгебра A — это область целостности.*

3.5 Свойства определителя Капелли-Вронского.

Пусть $F_n = k\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — свободная дифференциальная k -алгебра со свободными дифференциальными образующими $x_1, \dots, x_n$. Как коммутативно-ассоциативная k -алгебра F_n порождена счетным числом алгебраически независимых переменных $x_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$; $x_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} x_i$), на которых сигнатурное дифференцирование $': F_n \rightarrow F_n$ действует естественным образом $\left(x_i^{(j)}\right)' \stackrel{\text{def}}{=} x_i^{(j+1)}$.

Как и в разделе 3.3, обозначим через $W(x_1, \dots, x_n)$ бесконечную матрицу с n столбцами и счетным числом строк, у которой на пересечении j -й строки и i -го столбца стоит $x_i^{(j)}$. Верхний минор n -го порядка этой матрицы обозначим $|x_1, \dots, x_n|$ — будем называть его определителем Капелли-Вронского для элементов $x_1, \dots, x_n \in F_n$. Зададим дифференциальную k -алгебру $\bar{F}_n$ (теми же самыми) дифференциальными образующими

$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ и одним определяющим дифференциальным соотношением $|\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n| = 0$. Ядром канонического дифференциального k -гомоморфизма $\varepsilon: F_n \rightarrow \bar{F}_n$, при котором $\varepsilon(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_i$, является дифференциальный k -идеал в F_n , порожденный определителем $|x_1, \dots, x_n|$. Из предложения параграфа 3 следует, что тогда все миноры n -го порядка матрицы $W(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ будут нильпотентами. Так как в факторалгебре $\bar{F}_n / \text{Rad } \bar{F}_n$ k -алгебры $\bar{F}_n$ по ее ниль-радикалу $\text{Rad } \bar{F}_n$ отсутствуют нильпотентные элементы, в k -подпространстве $V(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) / \text{Rad } F_n \stackrel{\text{def}}{=} (k\bar{x}_1 + \dots + k\bar{x}_n) / \text{Rad } F$ выполняются все соотношения Капелли порядка n .

Предложение 3.5.1. Обозначим m_i^j алгебраическое дополнение для элемента $x_i^{(j)}$ в квадратной матрице

$$\begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} & \dots & x_n^{(0)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Тогда

- (a) $\sum_{i=1}^n x_i^{(s)} m_i^t = \begin{cases} 0, & \text{если } s \neq t \\ |x_1, \dots, x_n|, & \text{если } s = t \end{cases}; \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_s^{(i)} m_i^t = \begin{cases} 0, & \text{если } s \neq t \\ |x_1, \dots, x_n|, & \text{если } s = t \end{cases}$
- (b) многочлен $m_s^i \cdot m_t^j - m_s^j \cdot m_t^i$ делится в алгебре многочленов $k[x_i^{(j)}]_{i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1}$ на многочлен $|x_1, \dots, x_n|$.

Доказательство. Утверждение (a) — это азы линейной алгебры.

Хорошо известно (см. [10][стр. 176, теор. 1]), что многочлен $|x_1, \dots, x_n|$ неприводим. Тогда факторалгебра $k[x_i^{(j)}]_{i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1} / |x_1, \dots, x_n|$ не содержит делителей нуля. В её поле частных строки матрицы Вронского для $x_1, \dots, x_n$ линейно зависимы, а значит образ $m_s^i \cdot m_t^j - m_s^j \cdot m_t^i$ в $k[x_i^{(j)}]_{i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1} / |x_1, \dots, x_n|$ равен нулю. Что и требовалось. $\square$

Следствие 3.5.1. Положим $r_i(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} m_{n-1}^i (i = 1, \dots, n)$. Тогда в фактор алгебре $\bar{F}_n$ имеют место следующие равенства

- (a) $r_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_1 + r_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_2 + \dots + r_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_n = 0$,
- (b) $\bar{r}_i \cdot \bar{r}_j' - \bar{r}_i' \cdot \bar{r}_j = 0$.

Более того, в дифференциальной алгебре $\bar{F}_n / \text{Rad } \bar{F}_n$ ранг Капелли k -подпространства $(k\bar{r}_1 + \dots + k\bar{r}_n)$ не превосходит единицы.

Определение 3.5.1. Элементы $\bar{r}_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, \bar{r}_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ дифференциальной k -алгебры $\bar{F}_n$ будем называть *проинтегралами*, имея в виду, что в локализации $\bar{F}_n[\bar{r}_j^{-1}]$ элементы $\bar{r}_i / \bar{r}_j$ являются константами. Действительно из свойства (b) следствия вытекает, что $(\bar{r}_i / \bar{r}_j)' = 0$ в $\bar{F}_n$. На самом деле локализация $\bar{F}_n[\bar{r}_j^{-1}]$ $j = 1, \dots, n$ допускают прозрачное описание.

Алгебра Н.Никчемного. Обозначим R_n дифференциальную k -алгебру заданную дифференциальными образующими $v_1, \dots, v_n; u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$ определяющими соотношениями:

$$v_i^{(n-1)} - u_{n-2} v_i^{(n-2)} - u_{n-3} v_i^{(n-3)} - \dots - u_1 v_i^{(1)} - u_0 v_i = 0$$

Очевидно, что R_n как коммутативно-ассоциативная k -алгебра порождается следующими алгебраически независимыми элементами

$$v_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} v_i, v_i^{(1)}, \dots, v_i^{(n-2)} (i = 1, \dots, n),$$

$$u_j^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} u_j, u_j^{(1)}, \dots (j = 0, 1, \dots, n),$$

на которых сигнатурное дифференцирование $'$ действует естественным образом:

$$(u_j^{(k)})' \stackrel{\text{def}}{=} u_j^{(k+1)} \quad (j = 0, 1, \dots, n-2; k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(v_i^{(n-2)})' \stackrel{\text{def}}{=} u_{n-2}v_i^{(n-2)} + u_{n-3}v_i^{(n-3)} + \dots + u_1v_i^{(1)} + u_0v_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(v_i^{(k)})' \stackrel{\text{def}}{=} v_i^{(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-3)$$

Несложно доказать по индукции, что при $j > n-2$ j -я строка матрицы $W_n(v_1, \dots, v_n)$ выражается в виде линейной комбинации предыдущих с коэффициентами из дифференциальной k -подалгебры, порожденной в R_n элементами $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$. Поэтому все миноры n -го порядка этой матрицы равняются нулю и в k -пространстве $k \cdot v_1 + k \cdot v_2 + \dots + k \cdot v_n$ выполняются все соотношения Капелли порядка n . Так как коммутативно-ассоциативная k -алгебра R_n является областью целостности, то из результатов параграфа 3.4 в поле частных Q_{R_n} должны найтись (не все нулевые) константы $q_1, \dots, q_n$, для которых $q_1 \cdot v_1 + \dots + q_n \cdot v_n = 0$. Но все миноры $(n-1)$ -го порядка, подматрицы $W_n(v_1, \dots, v_n)$, состоящей из строк $0, 1, \dots, n-2$ отличны от нуля. Поэтому в силу следствия предыдущего подпункта в качестве $q_1, \dots, q_n$ можно взять $r_1(v_1, \dots, v_n)/r_j(v_1, \dots, v_n), \dots, r_n(v_1, \dots, v_n)/r_j(v_1, \dots, v_n)$. В частности справедлива следующая

Теорема 3.5.1. *Для любого $j = 1, \dots, n$ локализации $\bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^{-1}]$, $R_n[r_j(v_1, \dots, v_n)^{-1}]$ k -алгебр $\bar{F}_n$, R_n дифференциально изоморфны.*

Доказательство. Построим взаимнообратные отображения между этими алгебрами:

$$\varepsilon_1: \bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^{-1}] \rightarrow R_n[r_j(v_1, \dots, v_n)^{-1}], \varepsilon_2: R_n[r_j(v_1, \dots, v_n)^{-1}] \rightarrow \bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^{-1}]$$

Заданные формулами: $\varepsilon_1(\bar{x}_i) = v_i$ и $\varepsilon_2(v_i) = \bar{x}_i$, $\varepsilon_2(u_i) = -m_j^i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)/r_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Корректность ε_1 вытекает из того, что единственное соотношение алгебры F_n выполнено в R_n . Корректность ε_2 вытекает из пункта (а) следствия 3.5.1. $\square$

Предложение 3.5.2. *Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t) \in C^\infty(a, b)$ и $|y_1(t), \dots, y_n(t)| = 0$. Тогда в любом подинтервале $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ существует интервал (a_2, b_2) , на котором эти функции линейно зависимы.*

Доказательство. Применим предложение 3.2.3 к дифференциальной алгебре A порожденной $y_1, \dots, y_n$ и интервалу (a_1, b_1) . Полученный интервал назовем (a_2, b_2) . К полю частных области целостности $A|_{(a_2, b_2)}$ применима лемма о линейной зависимости над полем констант [7, ргор. 2.8], из которой и вытекает требуемое. $\square$

Дополнение А. Пример первичной дифференциальной ниль-алгебры (см. [6])

Введем свободную дифференциальную алгебру от одной образующей. Будем обозначать образующую через x , а ее i -ю производную через x_i . Тогда свободной дифференциальной алгеброй от x будем называть $k_+\{x\} = k_+[x, x_1, x_2, \dots]$, т.е. свободную коммутативную алгебру от x и ее производных. Плюс в нижнем индексе обозначает, что берутся мономы только положительной степени. В частности, эта алгебра не содержит единицы.

Для изучения идеала $[x^m]$ рассмотрим векторное пространство V_m с $m-1$ парой счетных серий базисных векторов ξ_i^k и η_i^k ($k = 0, \dots, m-2$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Внешнюю алгебру этого пространства будем обозначать через $\Lambda(V_m)$, а ее четную и нечетную компоненты — через $\Lambda_0(V_m)$ и $\Lambda_1(V_m)$ соответственно. Отметим, что мы не предполагаем наличия в $\Lambda(V_m)$ единицы. Введем на $\Lambda(V_m)$ дифференцирование, которое на образующих будет действовать увеличением на единицу нижнего индекса, т.е. $(\xi_i^k)' = \xi_{i+1}^k$ и $(\eta_i^k)' = \eta_{i+1}^k$. Заметим, что $\Lambda_0(V_m)$ является дифференциальной подалгеброй.

Вернемся к нашему основному объекту — фактору свободной дифференциальной алгебры $k_+\{x\}$ по дифференциальному идеалу $[x^m]$. Обозначим его через D_m , образ x при факторизации через $\bar{x}$. Построим гомоморфизм дифференциальных алгебр $\varphi_m: D_m \rightarrow \Lambda_0(V_m)$, положив $\varphi_m(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{m-2} \xi_0^k \wedge \eta_0^k$.

Лемма 1. Гомоморфизм φ_m инъективен.

Доказательство. Сначала проверим, что φ_m — гомоморфизм. Для этого достаточно убедиться в том, что $(\varphi_m(\bar{x}))^m = 0$. Действительно, в $\varphi_m(\bar{x})$ входят $2(m-1)$ антикоммутирующих переменных, а степень всех мономов в $(\varphi_m(\bar{x}))^m$ равна $2m$. В силу кососимметричности получаем нуль.

Напомним (следуя Г. Леви [8]), что моном в $k_+\{x\}$ называется α_m -моном, если сумма степеней соседних производных меньше m . Мы будем пользоваться следующим фактом (см. [8, теорема 1.1]):

Факт. Множество образов α_m -мономов является базисом $k_+\{x\}/[x^m]$ как векторного пространства (в работе Г. Леви этот факт сформулирован и доказан для $k\{x\}/[x^m]$).

Таким образом, достаточно проверить, что ни одна нетривиальная линейная комбинация α_m -мономов не лежит в ядре φ_m . Рассмотрим какую-нибудь линейную комбинацию α_m -мономов. Введем на мономах следующий порядок: сравниваем по очереди все производные начиная с младших. Если на очередном шаге мы получили неравенство, то большим будет тот моном, у кого эта очередная производная старше. Рассмотрим наибольший относительно этого порядка моном в линейной комбинации, и пусть он имеет вид $M = \bar{x}_{k_n} \dots \bar{x}_{k_0}$, где $k_n \geq \dots \geq k_0$. Заметим, что α_m -свойство можно переформулировать следующим образом: для любых i и i' , таких, что $i - i' = m-1$, выполняется неравенство $k_i - k_{i'} > 1$. Отсюда, в частности, следует неравенство $k_i \geq 2 \lfloor \frac{i}{m-1} \rfloor$. Тогда укажем в $\varphi_m(M)$ такой моном, который не появится ни из какого другого монома исходной линейной комбинации. Из сомножителя, соответствующего $\bar{x}_{k_j}$, мы возьмем в этот моном произведение $\xi_{k_j-q}^r \wedge \eta_q^r$, где q и r — соответственно неполное частное и остаток от деления j на $m-1$. В силу доказанного неравенства относительно k_i , это выражение корректно определено. Кроме того, из переформулированного α_m -свойства следует такая цепочка неравенств для любого j :

$$k_j - q < k_{j+m-1} - q - 1 < k_{j+2m-2} - q - 2 < \dots \quad (1)$$

Из этих неравенств в свою очередь следует, что все образующие, входящие в этот антикоммутативный моном, различны, а значит, сам моном не равен нулю.

Докажем, что этот антикоммутативный моном мог появиться только из рассматриваемого α_m -монома. Пусть он появился из еще какого-то α_m -монома M' и младшая производная в M' имеет порядок k . Так как наш моном был наибольшим относительно введенного порядка, то $k \leq k_0$. С другой стороны, производная порядка k должна дать в антикоммутативный моном произведение вида $\xi_a^c \wedge \eta_b^c$, но наименьшее возможное значение $a + c$, достигаемое в силу (2) при $a = k_0$ и $c = 0$, равно k_0 , т.е. $k = k_0$, причем в антикоммутативный моном младшие производные дают одинаковый вклад. Повторяя аналогичные рассуждения для оставшихся производных, получаем $M = M'$, что и требовалось.

Таким образом, инъективность φ_m доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть P — первичная дифференциальная алгебра, а $Q \subset P$ — её дифференциальная подалгебра. Тогда Q тоже первична.

Доказательство. Действительно, пусть в Q есть такие идеалы A и B , что $AB = 0$. Породим ими идеалы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ в P . Но эти идеалы можно порождать уже не в сигнатуре дифференциальной алгебры, а как идеалы в смысле коммутативной алгебры. Но тогда, очевидно, $\bar{A}\bar{B}$ тоже равно нулю. $\square$

Теорема 1. Алгебра D_2 первична.

Доказательство. В силу предыдущей леммы, осталось показать, что в $\Lambda_0(V_2)$ нет таких двух идеалов. Пусть есть такие идеалы A и B , и в них лежат элементы $a \in A$ и $b \in B$. Тогда их можно домножить на такие мономы, чтобы a и b стали мономами. Теперь продифференцируем a столько раз, сколько потребуется, чтобы среди полученных слагаемых появилось такое, в котором все производные имеют порядок, больший порядка любой производной в b . Соответственно произведение b и этой производной a будет не равно нулю. $\square$

Дополнение В. Во всяком простом дифференциальном кольце есть единица.

Пусть R — дифференциальное кольцо. Через $R[\partial]$ будем обозначать кольцо дифференциальных операторов над R .

Лемма 3. Пусть R — простое дифференциальное кольцо. Существуют такие $x_1, \dots, x_m \in R$, что $R = Rx_1 + \dots + Rx_m$.

Доказательство. Покажем, что для всякого ненулевого $a \in R$ верно $R[\partial]a = R$. Так как умножение в R ненулевое, существуют такие $b, c \in R$, что $bc = 0$. Так как R простое, найдется $D \in R_{id}[\partial]$ такой, что $Da = c$. Тогда $bD \in R[\partial]$ и $(bD)a \neq 0$. Стало быть, $R[\partial]a \neq 0$. Это идеал и в силу простоты R требуемое равенство $R[\partial]a = R$ верно.

Рассмотрим произвольный $a \in R$. Существует $D \in R[\partial]$ такой, что $Da = a$. Пусть $D = a_0 + a_1\partial + \dots + a_n\partial^n$. Рассмотрим набор из $a, a_0, \dots, a_n$ и их производных вплоть до $n + 1$ -го порядка включительно. Покажем, что этот набор порождает R как идеал в коммутативном кольце. Рассмотрим произвольный $b \in R$. Существует $D_b \in R[\partial]$ такой, что $D_b a = b$. Пусть максимальная степень вхождения оператора дифференцирования ∂ в D_b равна N . Тогда перепишем равенство $D_b a = b$ в виде $D_b D^{N+1} a = b$. Левая часть равенства представляет из себя сумму произведений, степень которых относительно $a, a_0, \dots, a_n$ и их производных равна $2 + N$. Вес каждого такого произведения (суммарное количество примененных операторов дифференцирования) не больше $n(N + 1) + N$. По принципу

Дирихле, в каждом из таких произведений одна из производных будет иметь порядок не больше n , то есть каждое из произведений лежит в $Ra^{(k)}$ или $Ra_i^{(k)}$, где $k \leq n$. □

Лемма 4. *Во всяком простом дифференциальном кольце есть единица.*

Доказательство. Рассмотрим $x = (x_1, \dots, x_m)$ из предыдущей леммы. Существует матрица $A \in \text{Mat}_m(R)$ такая, что $Ax^T = x^T$. Это равенство переписывается в виде $(A - E)x^T = 0$. Домножив на матрицу из алгебраических дополнений, получаем, что $\det(A - E)x_i = 0$ для всех i . Так как x_i являются образующими модуля R , отсюда следует $\det(A - E) = 0$. Если раскрыть это равенство, то получится выражение для единицы через элементы матрицы A . Что и требовалось. □

Мыслю следовательно существую

*“Indeed, in many respects, she was quite English,
and was an excellent example of the fact
that we have really everything in common with America nowadays,
except, of course, language.”*

**FOR PROUD AND LEARNED
(Where is clear and light)**

Moscow, 2010 – 2014

Chapter 3.
Capelli relations
and their applications
in differential algebras.

3.1 Prime and maximal ideals in countable-dimensional commutative associative algebras over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$.

By $\bar{k}$ we denote the algebraic closure of field k .

Proposition 3.1.1. *Let A be commutative associative k -algebra and $\varphi: A \rightarrow \bar{k}$ be a nonzero homomorphism. Then, k -subalgebra $\varphi(A)$ is a subfield of $\bar{k}$, and $\text{Ker } \varphi$ is a simple ideal in A .*

Proof. Consider any nonzero element $\varphi(a) \in \bar{k}$. It is algebraic over k . Let us denote by $f(t) \in k[t]$ its minimal polynomial. Since $\bar{k}$ is a domain, $f(0) \neq 0$. Thus, k -subalgebra $k[\varphi(a)]$ contains the identity element. Moreover, $f(t) = f(0) + t \cdot g(t)$, where $g(t) \in k[t]$. The equality $f(0) + \varphi(a) \cdot g(\varphi(a)) = 0$ implies that $-g(\varphi(a))/\varphi(0) \in k[\varphi(a)]$ is a multiplicative inverse for $\varphi(a)$. $\square$

Proposition 3.1.2. *Every simple commutative associative k -algebra A contains the identity. Moreover, A is a field.*

Proof. Since A is simple, the multiplication in A is nonzero and A contains no ideals except 0 and A . Hence for every $a \in A$ the ideal $A \cdot a \stackrel{\text{def}}{=} \{d \cdot a | d \in A\}$ is either zero or coincides with A . If $A \cdot a = 0$, one-dimensional subspace ka is a nonzero ideal in A , so $ka = A$. In this case $A \cdot A = A \cdot ka = A \cdot a = 0$, but it is impossible since the multiplication in A is nonzero. Thus, $A \cdot a = A$ for all $a \in A$. There exists $e \in A$ such that $e \cdot a = a$. Since every $b \in A$, there exists $c \in A$ such that $b = c \cdot a$ ($c \in A$). Then $e \cdot b = (e \cdot a) \cdot c = ac = b$, so e is the identity. Moreover, there exists $d \in A$ such that $d \cdot a = e$, i.e. a is invertible. $\square$

Theorem 3.1.1. *Let A be commutative associative unital k -algebra, and $M \subset A$ is a maximal ideal. Assume that dimension of A is less than cardinality of k . Then, quotient algebra A/M is an algebraic extension of k .*

Proof. Replacing A with A/M , we assume further that A is a field, and M is zero ideal. Let us consider an arbitrary nonzero $a \in A$. Cardinality of the set $\{\frac{1}{a-\alpha} | \alpha \in k\}$ exceeds $\dim_k A$. Thus, elements of this set are linearly dependent over k :

$$0 = \frac{\beta_1}{a - \alpha_1} + \dots + \frac{\beta_n}{a - \alpha_n} = \frac{p(a)}{(a - \alpha_1) \dots (a - \alpha_n)}$$

where $p(x) \in k[x]$. Since $p(a) = 0$, a is algebraic over k . $\square$

Corollary 3.1.1. *Assume that $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ and A is countably-dimensional over k . Then, for every maximal ideal $M \subset A$ field A/M is isomorphic either $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.*

Corollary 3.1.2. *Assume that k -dimension of A is less than cardinality of k . Then, for every non-nilpotent $a \in A$ there exists k -homomorphism $\varphi: A \rightarrow \bar{k}$ such that $\varphi(a) \neq 0$.*

Proof. Let us consider the chain of k -homomorphisms:

$$A \xrightarrow{\varepsilon_a} A[a^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_M} A[a^{-1}]/M \xrightarrow{\varepsilon} \bar{k},$$

where $A[a^{-1}]$ is a localization of A with respect to a , M is an arbitrary maximal ideal of unital algebra $A[a^{-1}]$, and ε is an arbitrary embedding of algebraic extension $A[a^{-1}]/M \supset k$ in $\bar{k}$.

Let us denote $\varepsilon \circ \varepsilon_M \circ \varepsilon_a$ by φ . Then:

$$\varphi(a) \cdot (\varepsilon \circ \varepsilon_M(a^{-1})) = \varepsilon \circ \varepsilon_M(\varepsilon_a(a) \cdot a^{-1}) = \varepsilon \circ \varepsilon(a/a) = 1.$$

Thus, $\varphi(a) \neq 0$. □

Corollary 3.1.3. *Assume that dimension of A is less than cardinality of k . Then, the intersection of all prime ideals in A is the greatest ideal in A consisting of nilpotent elements.*

3.2 Commutative algebras with a single specified derivation.

Definition 3.2.1. A k -linear map $D: A \rightarrow A$ satisfying $D(a+b) = D(a) + D(b)$ and $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ for all $a, b \in A$ is called *derivation*. An algebra with specified derivation is said to be *differential algebra*. We denote $D(a)$ by a' .

Signature (in the sense of universal algebra) of differential algebra includes bilinear multiplication $*$: $A \otimes_k A \rightarrow A$ and unary derivation $D: A \rightarrow A$.

Definition 3.2.2. An element $a \in A$ such that $a' = 0$ is said to be a *constant*.

Obviously, the set of constants is a subalgebra. Moreover, if A is a field, the set of constants is a subfield.

Definition 3.2.3. Let A_1 and A_2 be differential k -algebras with respect to derivations D_1 and D_2 , respectively. A k -linear map $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ is said to be a *homomorphism of differential algebras* if:

$$\varphi(D_1 \times a_1) = D_2 \times \varphi(a_1), \quad \varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2) \quad (a_1, a_2 \in A_1).$$

In what follows we restrict ourselves to the cases $k = \mathbb{R}$ and $k = \mathbb{C}$.

Example 3.2.1. Let $A = k[[t]]$ be an algebra of formal power series in variable t . It is differential algebra with respect to standart derivation $D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}$. A is a domain, and its field of fractions is a formal Laurent series field $k((t))$. All constants in $k((t))$ are of the form $\lambda \cdot 1$, where $\lambda \in k$. Every ideal in A is principal, nonzero ideals in A are of the form $A \cdot t^i$ ($i \in \mathbb{N}$). Since $\text{char } k = 0$, A does not contain nontrivial differential ideals. Thus, A provides us an example of simple unital differential algebra.

Let us also note, that all derivations on A are of the form $f(t) \frac{d}{dt}$, ($f(t) \in k[[t]]$).

Proposition 3.2.1. *Assume that $\text{char } k = 0$. Formal Laurent series $f_1(t), \dots, f_n(t) \in k((t))$ are linearly dependent over k if and only if the determinant*

$$|f_1, \dots, f_n| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{vanishes.}$$

Proof. Proposition [7, prop. 2.8] states that elements of differential field are linearly dependent over constants if and only if the corresponding determinant vanishes. Since the field of constants of $k((t))$ is k , this statement implies our proposition. □

Example 3.2.2. Let $A = H(D)$ be an algebra of holomorphic functions in variable z defined in the domain D . From the complex calculus we know, that all such functions are infinite differentiable with respect to $\frac{d}{dz}$. Moreover, they are analytic in D . In particular, A is a domain.

Example 3.2.3. Let A be $k[x_1, \dots, x_n]$ ($k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). A derivation $D: A \rightarrow A$ is uniquely defined by $D(x_1), \dots, D(x_n)$. More precisely, if $D \times x_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \in A$ ($i = 1, \dots, n$), then $D = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Let φ be a homomorphism of differential k -algebra A to $k[[t]]$. Then, formal power series $\varphi(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$) are formal solutions of the following system of differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi(x_i)) &= (\varphi(D \times x_i) = \varphi(f_i(x_1, \dots, x_n))) = \\ &= f_i(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

General Picard theorem mentioned in Chapter 2 (??) implies that these power series converge in some neighborhood of zero to the solution of the system:

$$\frac{d}{dt}x_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

with the initial condition: $x_i(0) = \varphi(x_i)|_{t=0}$.

Corollary 3.2.1. Let A be a finitely generated commutative associative algebra over $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, and D is a derivation $A \rightarrow A$. Let φ be a differential k -homomorphism $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ ($\varphi(D \times x) = \frac{d}{dt}\varphi(x)$). Then, all power series of the form $\varphi(a)$ ($a \in A$) converge in some neighborhood of zero.

Proof. Let $a_1, \dots, a_m$ be a set of generators of A . The derivation D is uniquely defined by $D(a_1), \dots, D(a_m)$ which are polynomials in $a_1, \dots, a_m$.

Let $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_m]$ be polynomials such that

$$D \times a_i = f_i(a_1, \dots, a_m) \quad (i = 1, \dots, m)$$

Denote $\sum_{i=1}^m f_i(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i}$ by $\bar{D}$. The epimorphism $\bar{\varphi}: k[x_1, \dots, x_m] \rightarrow A$ defined by

$\bar{\varphi}(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} a_i$ is a homomorphism of differential algebra $k[x_1, \dots, x_m]$ with respect to $\bar{D}$ to A with respect to D . Indeed, for every $g \in K[x_1, \dots, x_m]$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\bar{D} \times g(x_1, \dots, x_m)) &= \bar{\varphi}\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot f_i(x_1, \dots, x_m)\right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x_1=a_1, \dots, x_m=a_m}\right) \cdot \\ f_i(a_1, \dots, a_m) &= D \times g(a_1, \dots, a_m) = D \times \bar{\varphi}(g). \end{aligned}$$

As noted in Example 3.2.3, power series $\varphi(\bar{\varphi}(x_i))$ ($i = 1, \dots, m$) converge in some neighborhood of zero. $\square$

Example 3.2.4. Let $A = C^\infty(a, b)$ be a $\mathbb{R}$ -algebra of infinitely differentiable functions defined on the interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$. A is a differential algebra with respect to derivation $\frac{d}{dt}$. Obviously, there are zero divisors in A , but there are no nilpotents in A . Despite the fact that for more than four centuries this algebra is used for solving differential equations, it is not employed for representation of finitely generated differential algebras. There are many functions $x(t) \in C^\infty(a, b)$ such that $x(t)$ is nowhere analytic. For example, Taylor series of $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sqrt{2^k}} \cos(2^k t)$ diverges at any point. But even in this case Picard theorem and its corollaries help to find suitable approach.

Proposition 3.2.2. Assume that function $x(t) \in C^\infty(a, b)$ is nowhere analytic in (a, b) . Then, differential subalgebra generated by $x(t)$ in $C^\infty(a, b)$ is isomorphic to free differential algebra of rank one, i.e. functions $x(t)$, $x'(t)$, $\dots$ are algebraically independent over $\mathbb{R}$.

Proof is left to the reader.

Proposition 3.2.3. Let $A \subset C^\infty(a, b)$ be a finitely generated differential subalgebra. Then, there exists an interval $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ such that for every interval $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ subalgebra $A|_{(a_2, b_2)}$ is isomorphic to $A|_{(a_1, b_1)}$.

Moreover, $A|_{(a_1, b_1)}$ is a domain.

Proof. Let us assume the contrary. Then, there exists a descending chain of intervals $(a, b) \supset (a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \dots$ such that for all i the restriction homomorphism $A|_{(a_i, b_i)} \rightarrow A|_{(a_{i+1}, b_{i+1})}$ is not injective. By $a_1, \dots, a_n$ denote generators of A . Let $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ be free differential algebra generated by $x_1, \dots, x_n$ (see, [4][p. 9]). Let I_i be a kernel of homomorphism $f_i: \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow A|_{(a_i, b_i)}$ (defined by $f_i(x_j) = a_j$). Since, there are no nilpotents in $C^\infty(a, b)$, each I_i is a radical differential ideal. Thus, we obtain an ascending chain of radical differential ideals $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$. Due to Ritt-Raudenbush theorem ([4][th. 7.1]) it is impossible.

Now let us prove the second statement of the proposition. Assume that there are nonzero $f, g \in A|_{(a_1, b_1)}$ such that $fg = 0$. Then, there exists an interval $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ such that $f(x) \neq 0$ for all $x \in (a_2, b_2)$. But g lies in the kernel of the restriction homomorphism $A|_{(a_1, b_1)} \rightarrow A|_{(a_2, b_2)}$. We obtained a contradiction with the choice of (a_1, b_1) . $\square$

3.3 Taylor homomorphism and its applications.

Throughout this section all differential k -algebras are assumed to be countably-dimensional, and $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. By $\text{Spec}_k A$ denote a spectrum of k -algebra A . Due to results of Section 3.1, for every ideal $M \in \text{Spec}_k A$ the quotient ring A/M is a field isomorphic either $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Let $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}$ be a k -homomorphism of k -algebra A to $\mathbb{C}$. For an element $a \in A$ let us define a formal power series $\tilde{\psi}(a) \in \mathbb{C}[[t]]$ by the formula:

$$\tilde{\psi}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \psi(D^i \times a) \frac{t^i}{i!},$$

where D is a k -derivation on A .

The above definition yields that:

$$\tilde{\psi}(a_1 * a_2) = \tilde{\psi}(a_1) * \tilde{\psi}(a_2), \quad \tilde{\psi}(D \times a) = \frac{d}{dt} \tilde{\psi}(a)$$

for all $a_1, a_2, a \in A$. This means, that k -linear map $\tilde{\psi}: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ is a k -homomorphism of differential k -algebra A to differential algebra $\mathbb{C}[[t]]$. We will call this homomorphism *Taylor homomorphism* at the point $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}$.

Remark. Obviously, every differential k -homomorphism $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ is a Taylor homomorphism at the point $\psi = \varepsilon \circ \varphi$, where $\varepsilon: \mathbb{C}[[t]] \rightarrow \mathbb{C}$ is defined by the formula $\varepsilon(f) = f(0)$.

Indeed, assuming that $\varphi(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{t^i}{i!}$, we have:

$$\tilde{\psi}(a) = \sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon \circ \varphi)(D^i \times a) \frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon\left(\frac{d^i}{dt^i} \varphi(a)\right) \frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{t^i}{i!} = \varphi(a)$$

Analytical spectrum.

Let us fix $M \in \text{Spec}_k A$. By ψ_M let us denote a k -homomorphism of A to the quotient algebra A/M , which is isomorphic either $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Thus, we can assume that ψ_M is a k -homomorphism from A to $\mathbb{C}$. By $\overline{\text{Spec}}_k A$ denote the subset of $\text{Spec}_k A$ consisting of ideals M such that the

image of Taylor homomorphism $\tilde{\psi}_M: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ consists of series converging in ε -neighborhood of zero. It turns out that there are sufficiently many k -homomorphisms of the form $\psi_M \rightarrow \mathbb{C}$, where $M \in \overline{\text{Spec}}_k A$.

Theorem 3.3.1. *Let A be a finitely generated differential k -algebra with respect to derivation D , and let $a \in A$ be a non-nilpotent element. Then, there exists $M \in \overline{\text{Spec}}_k A$ such that $\psi_M(a) \neq 0$.*

Proof. The localization $A[a^{-1}]$ with respect a is a finitely generated unital differential k -algebra. Let $I \subset A$ be a maximal differential ideal. Then, the quotient algebra $B \stackrel{\text{def}}{=} A/I$ is a simple unital differential k -algebra. Moreover, the element $a + I$ is invertible in B . Theorem of Razmyslov (see [5]) implies that B is a domain, and there exists $b \in B$ such that $B[b^{-1}]$ is finitely generated as commutative algebra (not as differential algebra). Let $N \in \text{Spec}_k B[b^{-1}]$ be an ideal. Due to generalized Picard theorem the image $\tilde{\psi}_N(B[b^{-1}])$ consists of series converging in some neighborhood of zero. Let M be a kernel of k -homomorphism:

$$A \xrightarrow{\varepsilon_1} A[a^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_2} A[a^{-1}]/I = B \xrightarrow{\varepsilon_3} B[b^{-1}] \xrightarrow{\psi_N} \mathbb{C}$$

Then, M is a prime ideal, and $M \in \overline{\text{Spec}}_k A$. Moreover, $\psi_M(a)$ is invertible, i.e. $\psi_M(a) \neq 0$. $\square$

Nilpotent element lemma. By $W(a_1, \dots, a_n)$ denote infinite matrix such that j^{th} cell in i^{th} row ($i = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n$) is filled with $D^i \times a_j$.

Lemma 3.3.1. *Assume that the uppermost minor of $W(a_1, \dots, a_n)$, i.e. $|a_1, \dots, a_n|$, is nilpotent. Then, any other $n \times n$ minor of $W(a_1, \dots, a_n)$ is nilpotent.*

Proof. Let $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ be a homomorphism of differential algebras. Since $\mathbb{C}[[t]]$ contains no nilpotent elements, $|\psi(a_1), \dots, \psi(a_n)| = 0$. Proposition 3.2.1 implies, that $\psi(a_1), \dots, \psi(a_n)$ are linearly dependent over k . Thus, all $n \times n$ minors of $W(\psi(a_1), \dots, \psi(a_n))$ equal zero. Hence, all $n \times n$ minors of $W(\psi(a_1), \dots, \psi(a_n))$ are contained in the kernel of every homomorphism $A \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$. Corollary 3.1.3 implies that all these minors are nilpotent. $\square$

Remark. If $n = 1$, the lemma implies that in the case $\text{char } k = 0$ the element a' is nilpotent for every nilpotent a . Combinatorial proof of this statement can be found in [4][lemma 1.7].

3.4 Capelli identities and the rank theorem.

Definition 3.4.1. k -algebra A of signature Ω is said to be *prime*, if the equality $(J_1, J_2) = 0$ implies $J_1 = 0$ or $J_2 = 0$ and to be *semiprime*, if the equality $(J, J) = 0$ implies $J = 0$ for any ideals J, J_1, J_2 of the algebra A .

This definition could be interpreted in the following way. Algebra A is prime, if for any $a, b, a_i \in A$, where $i \in (1, n)$, there exists a multilinear in a, b polynomial $p(a, b, a_i)$ such as

$$p(a, b, a_i) = a_1 \cdot \dots \cdot a_i \cdot a \cdot a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_j \cdot b \cdot a_{j+1} \cdot \dots \cdot a_n \neq 0$$

Algebra A is semiprime, if for any $a \in A$ and $n \in \mathbb{N}$ there exists a monomial, where a occurs n times, $\dots a \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \neq 0$.

Following [2][§3] we introduce definition of a Martindale centroid. For any A be prime k -algebra of signature Ω and let $D = D(A)$ be related associative subalgebra in $\text{End}_k A$. Let P be an injective hull of the D -module A , we denote $E = \text{End}_D P$ algebra of all endomorphisms of the D -module P , let $Q = EA$ be D -submodule in P . It is known, that in this case the restriction ρ of the action of the algebra E to D -module Q is commutative. Thus algebra $C = E/\text{Ker } \rho$ is commutative and is called *Martindale centroid*. We extend all operations of the signature Ω by

C -linearity from the algebra A to Q and endow Q with the structure of a C -algebra. C -algebra Q of the signature Ω is called *central closure* of the algebra A .

Proposition 3.4.1 ([2], 3.2). *If A is a prime k -algebra of signature Ω , then the centroid $C(A)$ is field, $Q(A)$ is a prime K -algebra and the C -algebra Q is characterized by the following properties*

1. $Q = CA$;
2. any nonzero D -submodule in Q has a nonzero intersection with A ;
3. any partial D -endomorphism $\varkappa$ of a nonzero ideal J of the algebra A into A determines a unique endomorphism $c \in C$, whose restriction to J coincides with $\varkappa$.

To formulate rank theorem we need the following definitions.

Definition 3.4.2. Denote by A a k -algebra of signature Ω and by F an absolutely free k -algebra of the same signature with free generators $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots)$. A polynomial $d_k(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ in the algebra F that is linear and skew-symmetric with respect to $x_1, \dots, x_k$ is called a *Capelli polynomial* of order k . Let V be an arbitrary k -subspace in A ; we say that all *Capelli identities* of order k are valid on V if for any Capelli polynomial of order k and any elements $v_1, \dots, v_k \in V, a_1, \dots, a_l$ in algebra A the equality

$$d_k(v_1, \dots, v_k, a_1, \dots, a_l) = 0.$$

is valid in A .

Definition 3.4.3. The least number k such that all Capelli identities of order k are valid on V is called the rank of the k -linear subspace V with respect to the algebra A . We denote this number by $\text{rank}(A, V)$.

Theorem 1 (rank). *Let V be k -subspace in prime k -algebra A of signature Ω . If $\text{rank}(A, V) < \infty$, then in the central closure $Q(A)$ of the algebra A we have*

$$\dim_{C(A)} C(A)V = \text{rank}(A, V) - 1.$$

k -algebra A of multilinear signature Ω , with non-unary operations, is called *simple*, if it is prime and does not contain nontrivial ideals.

In this case $D(A)$ -module A is irreducible and for any nonzero element c in Martindale centroid $C(A)$ nonzero submodule $c \cdot A$ in $Q(A)$ is also irreducible over $D(A)$ and due to property 2 of the proposition should have a nonzero intersection with A . Therefore, $c \cdot A$ coincides with A and $c: A \rightarrow A$ is an endomorphism of the irreducible $D(A)$ -module A . By the Schur Lemma all endomorphism in $\text{End}_K A$ is a skew field and as Ω contains nonunary operations, thus this skew field is commutative. This field of endomorphisms of $D(A)$ -module A is called centroid of the k -algebra A . We denote it C_A .

Corollary 3.4.1. *Let V be k -subspace in simple k -algebra A int signature Ω , that contains nonunary operations. If $\text{rank}(A, V) < \infty$, then dimension of the space $C_A \cdot V$ over centroid C_A of k -algebra A is equal to $\text{rank}(A, V) - 1$.*

Naturally all this statements, definitions, concepts can be interpreted in relation to commutative-associative differential k -algebras, signature of which consists of one bilinear operation — multiplication $*$ and one unary operation — differentiation $'$.

For any k -subspace V of a differential k -algebra A we consider the matrix $M(A, V)$, with columns enumerated by the elements $v \in V$, and $v^{(i)}$ is the element in i -th line of v -th column ($i = 0, 1, 2, \dots$). Then inequality $\text{rank}(A, V) < \infty$ means, that all the minors of the order $1 + m = \text{rank}(A, V)$ of this matrix are equal to zero, and some minor of m -th order is not equal to zero. Moreover, if $v_1, \dots, v_m \in V$ are numbers of the columns of the nonzero minor, then $v_1, \dots, v_m$ can be chosen as a basis of C_A -subspace $C_A \cdot V$ in $Q(A)$. It is left to understand the definition of prime and semiprime differential k -algebra. Primacy means, that for any two nonzero elements a, b of an algebra A there are natural numbers i, j , that $a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$ (see examples (paragraph 3.2)). Более того:

Lemma 1. *Differential algebra A is prime if and only if for any $a, b \in A$ there is an n , then $a^{(n)}b \neq 0$.*

Proof. Necessity of the statement is obvious. Let A be prime and numbers i and j satisfy the following equation $a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$ and besides we chose the pair (i, j) with the smallest sum and the smallest j of all such pairs. Let $j > 0$. Then $a^{(i)}b^{(j-1)} = 0$, meaning $(a^{(i)}b^{(j-1)})' = a_{(i+1)}b^{(j-1)} + a^{(i)}b^{(j)} = 0$. Hence $a_{(i+1)}b^{(j-1)} = -a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$, this inequality contradicts with the minimality of j . Thus, $j = 0$ as required. $\square$

Proved lemma implies

Theorem 2. *If differential k -algebra A is integral domain and Q_A is its classic division ring, then Martindale centroid $C(A)$ of the differential algebra A coincides with subfield of constants of the field Q_A , meaning $C(A)$. Moreover central closure $Q(A)$ coincides with $C(A) \cdot A$.*

The latest results of Gleb Pogudin (see [6] and Appendix A) show that prime differential commutative-associative k -algebras are not required to be integral domains. In particular, differential algebra over field of rational numbers, with one differential generator x and one differential identity $x^2 = 0$ is prime, but all its elements are nilpotent. So rank theorem remains valid for the class of differential algebras.

As for simple differential algebras the situation there is quite perfect. The results of Yu.P. Razmyslov (see. [5], [2]) implies the following theorem

Theorem 3. *For any simple differential commutative-associative k -algebra A ($\text{char } k \neq 2$) contains unit element. Moreover, if $\text{char } k = 0$, then algebra A is integral domain.*

3.5 Properties of the Capelli-Wronsky determinant.

Let $F_n = k\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ be a free differential algebra in differential indeterminates $x_1, \dots, x_n$. F_n is generated as commutative algebra by algebraically independent elements $x_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, \infty$; $x_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} x_i$). The derivation on F_n is defined by the formula $(x_i^{(j)})' \stackrel{\text{def}}{=} x_i^{(j+1)}$.

Following section 3.3, let us denote by $W(x_1, \dots, x_n)$ an infinite matrix with n columns and infinite number of rows such that (i, j) -th element is $x_i^{(j)}$. Note that the uppermost minor of this matrix is $|x_1, \dots, x_n|$. We will call it Capelli-Wronsky determinant for elements $x_1, \dots, x_n$.

By $\bar{F}_n$ denote the quotient algebra $F_n / [x_1, \dots, x_n]$, and let $\varepsilon: F_n \rightarrow \bar{F}_n$ be the canonical projection. Lemma 3.3.1 implies that all $n \times n$ minors of $W(\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_n))$ are nilpotent. Since there are no nilpotent elements in $\bar{F}_n / \text{Rad } \bar{F}_n$, the subspace $V(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) / \text{Rad } \bar{F}_n \stackrel{\text{def}}{=} (k\bar{x}_1 + \dots + k\bar{x}_n) / \text{Rad } \bar{F}_n$ satisfies all Capelli identities of order n .

Proposition 3.5.1. By m_j^i denote (i, j) -th cofactor of the square matrix

$$\begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Then:

$$(a) \sum_{i=1}^n x_i^{(s)} m_t^i = \begin{cases} 0, & \text{if } s \neq t \\ |x_1, \dots, x_n|, & \text{if } s = t \end{cases} ; \sum_{i=0}^{n-1} x_s^{(i)} m_i^t = \begin{cases} 0, & \text{if } s \neq t \\ |x_1, \dots, x_n|, & \text{if } s = t \end{cases}$$

(b) the polynomial $m_s^i \cdot m_i^j - m_s^j \cdot m_i^i$ is divisible by $|x_1, \dots, x_n|$ in the ring $k[x_i^{(j)}]_{i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1}$.

Proof. First statement is an easy exercise in linear algebra.

Let us recall that $|x_1, \dots, x_n|$ is irreducible (see [10][p. 176, th. 1]). Thus, the quotient algebra $k[x_i^{(j)}]_{i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1} / |x_1, \dots, x_n|$ is a domain. Let $\pi: k[x_i^{(j)}]_{i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1} \rightarrow k[x_i^{(j)}]_{i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1} / |x_1, \dots, x_n|$ be the canonical projection, and let Q be the field of fractions of $k[x_i^{(j)}]_{i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1} / |x_1, \dots, x_n|$. Then, the columns of Wronski matrix for $\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)$ are linearly dependent over Q . Hence, $\pi(m_s^i \cdot m_i^j - m_s^j \cdot m_i^i) = 0$, so we are done. $\square$

Corollary 3.5.1. By $r_i(x_1, \dots, x_n)$ denote $m_{n-1}^i (i = 1, \dots, n)$. Then, the following equalities hold in $\bar{F}_n$:

$$(a) \quad r_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_1 + r_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_2 + \dots + r_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_n = 0,$$

$$(b) \quad \bar{r}_i \cdot \bar{r}_j' - \bar{r}_i' \cdot \bar{r}_j = 0.$$

Moreover, Capelli rank of the k -subspace $(k\bar{r}_1 + \dots + k\bar{r}_n)$ in $\bar{F}_n / \text{Rad } \bar{F}_n$ does not exceed 1.

Definition 3.5.1. The elements $\bar{r}_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, \bar{r}_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \bar{F}_n$ are said to be *prointegrals*, because $(\bar{r}_i / \bar{r}_j)' = 0$ in $\bar{F}_n[\bar{r}_j^{-1}]$. Indeed, it follows from (b) of the corollary above.

Moreover, the localization $\bar{F}_n[r_j^{-1}]$ $j = 1, \dots, n$ admits a more opaque description.

O. Whatnot algebra By R_n denote differential k -algebra generated by $v_1, \dots, v_n; u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$ satisfying the following relations:

$$v_i^{(n-1)} - u_{n-2}v_i^{(n-2)} - u_{n-3}v_i^{(n-3)} - \dots - u_1v_i^{(1)} - u_0v_i = 0$$

Clearly, as a commutative algebra R_n is generated by the following algebraically independent elements:

$$v_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} v_i, v_i^{(1)}, \dots, v_i^{(n-2)} (i = 1, \dots, n),$$

$$u_j^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} u_j, u_j^{(1)}, \dots (j = 0, 1, \dots, n),$$

such that derivation is defined by the formulas:

$$(u_j^{(k)})' \stackrel{\text{def}}{=} u_j^{(k+1)} \quad (j = 0, 1, \dots, n-2; k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(v_i^{(n-2)})' \stackrel{\text{def}}{=} u_{n-2}v_i^{(n-2)} + u_{n-3}v_i^{(n-3)} + \dots + u_1v_i^{(1)} + u_0v_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(v_i^{(k)})' \stackrel{\text{def}}{=} v_i^{(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-3)$$

If $j > n-2$, than j^{th} row of $W_n(v_1, \dots, v_n)$ can be expressed as linear combination of the rows with smaller indexes over the subalgebra generated by $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$. Thus, all $n \times n$ minors vanish, and the subspace $k \cdot v_1 + k \cdot v_2 + \dots + k \cdot v_n$ satisfies all Capelli identities of rank n . Since R_n is a domain, the field of fractions Q_{R_n} contains constants $q_1, \dots, q_n$ (not all zero) such that $q_1 \cdot v_1 + \dots + q_n \cdot v_n = 0$. For all $1 \leq j \leq n$ $r_j(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, so $q_1, \dots, q_n$ can be defined by the formula $q_s = r_s(v_1, \dots, v_n)/r_j(v_1, \dots, v_n)$.

Theorem 3.5.1. *Let $j = 1, \dots, n$. Then, differential algebras $\bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^{-1}]$ and $R_n[r_j(v_1, \dots, v_n)^{-1}]$ are isomorphic.*

Proof. Define the isomorphisms:

$$\varepsilon_1: \bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^{-1}] \rightarrow R_n[r_j(v_1, \dots, v_n)^{-1}], \varepsilon_2: R_n[r_j(v_1, \dots, v_n)^{-1}] \rightarrow \bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^{-1}]$$

by the rule: $\varepsilon_1(\bar{x}_i) = v_i$ and $\varepsilon_2(v_i) = \bar{x}_i$, $\varepsilon_2(u_i) = -m_j^i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)/r_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. ε_1 is well defined because $|v_1, \dots, v_n| = 0$. ε_2 is well defined due to Corollary 3.5.1. $\square$

Proposition 3.5.2. *Let $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t) \in C^\infty(a, b)$, and $|y_1(t), \dots, y_n(t)| = 0$. Then, for every interval $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ there exists subinterval $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ such that $y_1(t), \dots, y_n(t)$ are linearly dependent on (a_2, b_2) .*

Proof. Let A be a differential algebra generated by $y_1, \dots, y_n$. Proposition 3.2.3 implies that there exists $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ such that $A_{(a_2, b_2)}$ is a domain. By Q we denote its field of fractions. Since $|y_1, \dots, y_n| = 0$ in Q , $y_1, \dots, y_n$ are linearly dependent over the field of constants of Q . The field of constants of Q coincides with $\mathbb{R}$, so we are done. $\square$

Appendix A. Example of prime differential nilalgebra (see, [6])

We denote a differential polynomial algebra in one indeterminate by $k\{x\}$. More precisely, $k\{x\}$ is a polynomial algebra $k[x_0, x_1, x_2, \dots]$ in a sequence of algebraic independent indeterminates ($x = x_0, x_1, x_2, \dots$) endowed with a derivation (i.e. k -linear operator satisfying the Leibniz law) such that $x'_n = x_{n+1}$. An ideal I is called a differential ideal if $I' \subset I$. Let $k_+\{x\}$ be the subalgebra of the differential polynomials with zero constant term.

Let us consider an infinite dimensional vector space V_m with a basis consisting of ξ_i^k and η_i^k ($k = 0, \dots, m-2, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). We denote a Grassmann algebra of V_m by $\Lambda(V_m)$ and denote its even and odd components by $\Lambda_0(V_m)$ and $\Lambda_1(V_m)$, respectively. Let us note that, from now on, $\Lambda(V_m)$ is assumed not to contain unity. Let us equip $\Lambda(V_m)$ with a derivation (not superderivation) using the formulas $(\xi_i^k)' = \xi_{i+1}^k$ and $(\eta_i^k)' = \eta_{i+1}^k$, i.e. the derivation increments the subscript. Obviously, $\Lambda_0(V_m)$ is a differential subalgebra in $\Lambda(V_m)$.

Let us denote the quotient algebra $k_+\{x\}/[x^m]$ by D_m and the image of x in D_m by $\bar{x}$. We define a homomorphism of differential algebras $\varphi_m: D_m \rightarrow \Lambda_0(V_m)$ by the rule $\varphi_m(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{m-2} \xi_0^k \wedge \eta_0^k$.

Lemma 2. *φ_m is a monomorphism.*

Proof Let us prove that φ_m is a homomorphism. It is sufficient to prove that $(\varphi_m(\bar{x}))^m = 0$. Indeed, $(\varphi_m(\bar{x}))^m$ is a homogeneous skew-symmetric form of degree $2m$ in $2(m-1)$ variables.

Let us recall that (according to Levi [8]) a monomial $x^{p_0}x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}$ ($p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) in $k_+\{x\}$ is said to be an α_m -monomial if $p_i + p_{i+1} < m$ for each i . We need the following fact ([8], theorem 1.1):

Fact. *Images of α_m -monomials in D_m constitute a basis for the linear vector space D_m .*

Thus it remains to check that the kernel of φ_m does not contain any non-trivial linear combination of α_m -monomials. Let us introduce a monomial order. We fix two monomials $P = x^{p_0}\cdots x_n^{p_n}$ and $Q = x_0^{q_0}\cdots x_n^{q_n}$ ($p_i, q_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Let j be the minimal index such that $p_j \neq q_j$. Then P is said to be larger than Q if $p_j < q_j$ and Q is said to be larger than P otherwise. This order is called *degrevlex* order ([9]).

Let us consider an arbitrary linear combination L of α_m -monomials and its leading term $M = \bar{x}_{k_n}\cdots\bar{x}_{k_0}$, where $k_n \geq \cdots \geq k_0$. The α_m -property can be reformulated as follows: for each pair i and i' such that $i - i' = m - 1$ holds the inequality $k_i - k_{i'} > 1$. In particular, $k_i \geq 2 \lfloor \frac{i}{m-1} \rfloor$. We are going to find a monomial μ in $\varphi_m(M)$ which does not appear in $\varphi_m(M')$ for any monomial $M' \neq M$ from L . We assign to each $\bar{x}_{k_j}$ a monomial $\xi_{k_j-q}^r \wedge \eta_q^r$, where q and r are the quotient and the remainder of division j by $m-1$, respectively. Let μ be the product of these monomials. Due to the inequality above, $k_j - q \geq 0$. Moreover, the α_m -property implies:

$$k_j - q < k_{j+m-1} - q - 1 < k_{j+2m-2} - q - 2 < \dots \quad (2)$$

for each j . Hence, all basis vectors appearing in μ are different and $\mu \neq 0$.

Let us prove that μ does not appear in any monomial $M' = \bar{x}_{k'_m}\cdots\bar{x}_{k'_0} < M$ ($k'_m \geq \cdots \geq k'_0$). Since $M' < M$, $k'_0 \geq k_0$. On the other hand, μ contains $\xi_a^b \wedge \eta_c^b$ from $\varphi_m(\bar{x}_{k'_0})$ for some a, b and c . Inequality (2) implies that minimum possible value for $a+c$ is k_0 , where $a = k_0$, b equals the remainder of division k_0 by $m-1$, and $c = 0$. Hence, $k_0 = k'_0$, $\varphi_m(\bar{x}_{k_0})$ and $\varphi_m(\bar{x}_{k'_0})$ correspond to the same submonomial of μ . Continuing this line of reasoning, we see that $M = M'$. Thus, φ_m is injective. $\square$

Lemma 3. *Let P be a prime differential algebra and $Q \subset P$ be its differential subalgebra. Then, Q is prime.*

Proof Let A and B be differential ideals in Q such that $AB = 0$. Consider ideals (not necessary differential) $\bar{A}$ and $\bar{B}$ in P generated by A and B respectively. Obviously, $\bar{A}\bar{B} = 0$. On the other hand, we claim that $\bar{A}$ and $\bar{B}$ are actually differential ideals. Indeed, let $a \in A$ and $x \in P$, then $(pa)' = p'a + pa'$, where $a, a' \in A$ and $p, p' \in P$. This contradicts the primality of P . $\square$

Theorem 4. *The algebra D_2 is prime.*

Proof. Due to Lemma 2, it remains to check that $\Lambda_0(V_2)$ is prime. Let A and B be such differential ideals that $AB = 0$. Let us fix $a \in A$ and $b \in B$. There exist monomials m_a and m_b such that $m_a a$ and $m_b b$ are nonzero monomials. Hence, we can assume without loss of generality that a and b are monomials. There also exists large enough N such that $a^{(N)}$ contains a monomial with derivations of higher order than the highest order of the derivations in b . Clearly, $a^{(N)}b \neq 0$. $\square$

Appendix B. Every simple differential ring is unital.

Let R be a differential ring. By $R[\partial]$ denote a ring of differential operators on R .

Lemma 4. *Assume that R is a simple differential ring. Then, there exist $x_1, \dots, x_m \in R$ such that $R = Rx_1 + \dots + Rx_m$.*

Proof. Let $a \in R$ be a nonzero element of a . Since the multiplication on R is nonzero, there exist $b, c \in R$ such that $bc \neq 0$. The simplicity of R implies that there exists $D \in R_{\text{id}}[\partial]$ such that $Da = c$. Then $bDa \neq 0$, so $R[\partial]a \neq 0$. Hence $R[\partial]a = R$.

Thus, for every nonzero $a \in R$ there exists $D \in R[\partial]$ such that $Da = a$. Let $D = a_0 + a_1\partial + \dots + a_n\partial^n$. By S denote the set $\{a^{(i)} \mid i \leq n+1\} \cup \{a_j^{(i)} \mid 0 \leq j \leq n, i \leq n+1\}$. Consider $b \in R$. There exists $D_b \in R[\partial]$ such that $D_b a = b$. By N denote $\deg_{\partial} D_b$. Let us rewrite the equality $D_b a = b$ as $D_b D^{N+1} a = b$. The left-hand side is a sum of monomials. Each of these monomials is of degree $N+2$ with respect to $a, a_0, \dots, a_n$ and their derivations. Weight of every monomial does not exceed $n(N+1) + N$. Thus, by the pigeonhole principle, every of these monomials contains at least one element of S . Hence, $R = \sum_{x \in S} Rx$. $\square$

Lemma 5. *Simple differential ring is unital.*

Proof. Let us consider $x = (x_1, \dots, x_m)$ given by the lemma above. There exists a matrix $A \in \text{Mat}_m(R)$ such that $Ax^T = x^T$. This equality can be rewritten as $(A - E)x^T = 0$. Multiplying by the adjugate matrix, we obtain $\det(A - E)x_i = 0$ for all i . Since x_i generate left R -module R , $\det(A - E) = 0$. This equality express the identity as a polynomial in the entries of A . $\square$

Список литературы

- [1] Размыслов Ю.П. Разъяснение к “Rolling simplexes and their commensurability” (уравнения поля по Тихо Браге) // Фундамент. и прикл. матем. 17:4 (2012), 193–215
- [2] Размыслов Ю.П. Тождества алгебр и их представлений // Наука 1989
- [3] Kolchin E.R. Differential algebra and algebraic groups.: Academic Press, 1973.
- [4] Капланский И. Введение в дифференциальную алгебр. М.: ИЛ, 1959.
- [5] Размыслов Ю.П. О конечно порожденных простых алгебрах Ли, удовлетворяющих стандартному Лиеву тождеству степени 5 // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика, механика. 1, 3 (1990), 37–41
- [6] Погудин Г.А. Первичные дифференциальные ниль-алгебры существуют // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика, механика. 1 (2014), 50–53
- [7] Magid A. R., *Lectures on differential Galois theory*, University lecture series of AMS, vol. 7, 1994.
- [8] Levi H., *On the structure of differential polynomials and their theory of ideals*, Trans. AMS, vol.51, 532-568, 1942.
- [9] Zobnin A.I., *One-element differential standard bases with respect to inverse lexicographical orderings*, Journal of Mathematical Sciences, December 2009, Volume 163, Issue 5, pp 523-533 .
- [10] Bocher M., *Introduction to higher algebra*, Courier Corporation, 1957.