

Посвящается Герману Вейлю

МЕСТО ДЛЯ БОГА

Москва, 2010

ФГБОУ ВПО Московский государственный университет

им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

MASTER KEY

„НАСТРОЙЩИК“

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НАЧАЛА ЦЕНТРАЛЬНОЙ
ДИНАМИКИ НА КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА.**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва, 2014

Обучаясь на механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова и проникаясь алгебраической терминологией кафедре высшей алгебры, для себя я осознала, что за прошедшие годы (с 2006 по 2014) мною было сделано три следующих наблюдения.

Наблюдение первое. Для того, чтобы абстрактная проективная плоскость была дезарговой и ее координатное тело было коммутативным необходимо и достаточно, чтобы в хотя бы одной аффинной карте этой плоскости выполнялась следующая

Теорема (см [26],[28]). Пусть точки Q_1, Q_2, Q_3, S таковы, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем l_1, l_2, l_3 прямые, проходящие через точку S и параллельные прямым Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_1Q_3 , соответственно. Возьмем произвольную прямую параллельную SQ_2 , но с ней не совпадающую, пусть она пересекает прямые l_1, l_2 в точках P_1 и P_2 . Тогда точка пересечения прямых, проходящих через точки P_1 и P_2 и параллельных SQ_1 и SQ_3 , соответственно, лежит на прямой l_3 .

Этот доказанный мной результат позволяет не только ввести геометрически наглядно привычное со времен Декарта понятие числа, доказав одним махом существование и коммутативность гомотетий с общим центром, но и указать естественный способ сравнения "ориентированных площадей" треугольников и строить теорию меры (в случае, когда координатное тело это поле действительных чисел) напрямую, не используя никакой евклидовой метрики.

Наблюдение второе.

Лемма о директрисе и фокусе (см. [30], [1]). Для любых действительных α, β, δ, k бесконечно дифференцируемые решения $x(t), y(t)$ ($(x(t) - a) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot (y(t) - a) \neq 0$) уравнения

$$(x'', y'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^3} \cdot (x - a, y - b) \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

лежат на кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке (a, b) , а директриса определяется уравнением $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta = 0$.

Теорема. Для любых действительных $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ бесконечно дифференцируемые решения $x(t), y(t), z(t)$ (не лежащие на прямой проходящей через фокус) уравнения

$$(x'', y'', z'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma z + \delta)^3} \cdot (x - a, y - b, z - c) \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

лежат на кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке (a, b, c) , а директриса является пересечением плоскости движения и плоскости $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta = 0$.

Эти два утверждения оказались той последней каплей, которые переполнили чашу, содержащую известные и на первый взгляд разнородные модели движения объектов по кривым второго порядка (в частности по прямым) при которых ускорение во все время движения направлено в одну и ту же точку (аффинного) пространства, включив в повестку дня вопрос о существовании универсальной модели центрально-квадратичной динамики.

Наблюдение третье.

Теорема 1 (см. [22]). Пусть $|G|$ — порядок конечной группы G и

$$H_{[G,G]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} [g, h] \quad ([g, h] \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}h^{-1}gh) \quad -$$

элемент групповой алгебры $K[G]$, где $K = \mathbf{C}$ — поле комплексных чисел. Тогда для любого представления $\rho : G \rightarrow \text{End}_K V$ в произвольном пространстве V линейное преобразование $\rho(H_{[G,G]})$ диагонализировано и его спектр имеет вид $\frac{1}{n^2}$, где n пробегает $\dim_K V_i$, где V_i — неприводимые компоненты в пространстве V относительно действия группы G .

Найденное мной доказательство этого несложного факта позволило мне перенести его на произвольные компактные группы.

Теорема 2 (см. [23]). Пусть мера Хаара μ на компактной группе G такова, что $\mu(G) = 1$, а $\rho : G \rightarrow \text{End}_K V$ — непрерывное представление G в банаховом пространстве V над полем комплексных чисел K

и линейный оператор $H_{[G,G]}^\rho$ определяется формулой

$$H_{[G,G]}^\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int_G \int_G [\rho(g), \rho(h)] d\mu_g d\mu_h.$$

Тогда для любого n -мерного подпространства W , на котором $\rho(G)$ действует неприводимо,

$$\begin{aligned} H_{[G,G]}^\rho(w) &= \left(\int_G \rho(g^{-1}) \left(\int_G \rho(h^{-1}) \rho(g) \rho(h) d\mu_h \right) d\mu_g \right) \cdot w = \\ &= \left(\int_G \left(\int_G \rho(g^{-1}) \rho(h^{-1}) \rho(g) d\mu_g \right) \rho(h) d\mu_h \right) \cdot w = \frac{1}{n^2} \cdot w \quad (w \text{ пробегает } W). \end{aligned}$$

На мой взгляд, наиболее фундаментальным здесь является случай регулярного представления компактной группы $G = SU(2, \mathbb{C})$.

Важный пример. Пусть $SU(2, K)$ — группа унитарных 2×2 матриц над комплексным полем K с детерминантом, равным единице, V — линейное пространство всех функций $f : G \rightarrow K$, для которых $\|f\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_G |f(g)|^2 d\mu_g < \infty$, и представление $\rho : G \rightarrow \text{End}_K V$ группы G реализуется правыми сдвигами $\rho(h) \times f(g) \stackrel{\text{def}}{=} f(hg)$. Хорошо известно (см. [16], [17], [20]), что

(а) в V с точностью до эквивалентности функций реализуется гильбертово пространство относительно полуторалинейной формы $(f(g), h(g)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G f(g) \overline{h(g)} d\mu_g$,

(б) для любого натурального n единственное с точностью до изоморфизма n -мерное представление группы G реализуется в V и имеет в V кратность, равную n ,

(с) сумма всех конечномерных неприводимых подпространств из V плотна в V .

Из теоремы 2 заключаем, что в гильбертовом пространстве V имеется полный ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов

оператора $H_{[G,G]}^\rho$. В частности, для любого натурального n кратность собственного значения $\frac{1}{n^2}$ равна n^2 . (См. для сравнения в книге [18] спектр оператора Шредингера для атома водорода.)

Вот, вкратце, мои основные результаты, вокруг которых ведутся исследования в данной диссертации: "Дифференциально-алгебраические и геометрические основы (начала) центральной динамики на квадратичных кривых".

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность А.В. Михалёву за неизменный интерес к моей научно-исследовательской работе, а также С.П. Новикову и В.М. Бухштаберу за поддержку.

Литература

- [1] *Размыслов Ю.П.* Разъяснение к “Rolling simplexes and their commensurability” (уравнения поля по Тихо Браге) // *Фундамент. и прикл. матем.* 17:4 (2012), 193–215
- [2] *Размыслов Ю.П.* Тождества алгебр и их представлений // *Наука* 1989
- [3] *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // *Наука* 1979
- [4] *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений
- [5] *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во ИЛ, 1962.
- [6] *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.
- [7] *Kolchin E.R.* Differential algebra and algebraic groups.: Academic Press, 1973.
- [8] *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебр. М.: ИЛ, 1959.
- [9] *Размыслов Ю.П.* О конечно порожденных простых алгебрах Ли, удовлетворяющих стандартному Лиеву тождеству степени 5 // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика, механика.* 1, 3 (1990), 37–41
- [10] *Погудин Г.А.* Первичные дифференциальные ниль-алгебры существуют // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика, механика.* 1 (2014), 50-53

- [11] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968
- [12] *Ламбек И.* Кольца и модули М.: Мир, 1971
- [13] *Михалёв А.В., Панкратьев Е.В.* Компьютерная алгебра. Вычисления в дифференциально-разностной алгебре М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989
- [14] *Джекобсон Н.* Теория колец М.: Гос. изд-во ин. лит., 1947
- [15] *Херстейн Н.* Некоммутативные кольца М.: Мир, 1972
- [16] *Наймарк М.А.* Нормированные кольца. М.: Изд-во "Наука 1968.
- [17] *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Изд-во "Наука 1976.
- [18] *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Изд-во "Наука 1974.
- [19] *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Изд-во Наука, 1969.
- [20] *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. — М.: Изд-во Наука, 1984.
- [21] *И.Р.Шафаревич* Основные понятия алгебры. — М.: ВИНТИ Итоги науки и техники, 1986.

Работы автора по теме диссертации:

- [22] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 6 (2008), 71—74.
- [23] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана сродни энергетическим уровням атома водорода // УМН, 64:4(388) (2009), 177—178

- [24] *О. В. Герасимова, Ю. П. Размыслов.* Гамильтоновость полиномиальных ниль-распределений на аффинной плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1 (2010), 67-70
- [25] *О. В. Герасимова* Плотные конечно порождённые подгруппы и интегрирование в компактных группах // Фундамент. и прикл. матем., 18:4 (2013), 71–77
- [26] *О. В. Герасимова, Ю. П. Размыслов.* Rolling simplexes and their commensurability (законы механики как проблема выбора между метрикой и мерой) // Фундамент. и прикл. матем., 16:3 (2010), 123–126
- [27] *O.V.Gerasimova, Yu.P.Razmyslov.* Rolling simplexes and their commensurability (Laws of mechanics as a problem of choice between metrics and measure) // Journal of Mathematical Sciences (New York), 177:6 (2011), 860-861 (translation)
- [28] *О. В. Герасимова.* Rolling simplexes and their commensurability. I (аксиома и критерий несжимаемости и лемма о моменте) // Фундамент. и прикл. матем., 17:2 (2012), 87–95
- [29] *O.V.Gerasimova.* Rolling simplexes and their commensurability. I. The axiom and criterion of incompressibility and the momentum lemma // Journal of Mathematical Sciences (New York), 186:4 (2012), 586-591 (translation)
- [30] *О. В. Герасимова.* Rolling simplexes and their commensurability. II (лемма о директрисе и фокусе) // Фундамент. и прикл. матем., 19:1, (2014), 13-19
- [31] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен, Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша. Тезисы докладов, с. 67-68, 2008