DIFFERENTIAL ALGEBRAIC UNIVERSES OVER AFFINE COMPLEX ALGEBRAIC CURVES. [1]

О. В. Герасимова, [2] Ю. П. Размыслов [3]

На языке дифференциальных образующих и дифференциальных соотношений для конечно порожденной коммутативно–ассоциативной дифференциальной C-алгебры A (с единицей) выражаются необходимые и достаточные условия того, что при любом гомоморфизме Тэйлора $\widetilde{\psi}_M : A \to \mathbb{C}[[z]]$ степень трансцендентности образа $\widetilde{\psi}_M(A)$ над C не превосходит единицы ($\widetilde{\psi}_M(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \psi_M(a^{(m)})\frac{z^m}{m!}$, где $a \in A$, $M \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} A$ — максимальный идеал в A, $a^{(m)}$ — результат m-кратного применения сигнатурного дифференцирования к элементу a, ψ_M — канонический эпиморфизм $A \to A/M$).

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, ее ранг, гомоморфизм Тэйлора, аналитический спектр, росток траектории, замыкание орбиты, аффинная алгебраическая кривая.

Key words: differential algebra, its rank, Taylor homomorphism, analytic spectrum, trajectory-germ, orbit-closure, affine algebraic curve.

"Popular series is bound
to express popular views."
Оскар Уайльд

1. Введение. Эти заметки написаны не для "гордых ученых" (см. [1], введение), а для тех кто вслед за нами захочет их перечитать.

1.1. Дифференциальные C-алгебры Герасимовой. Пусть $F_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} C[x^{(i)}, y^{(j)} | i, j = 0, 1, 2, \dots]$ – свободная дифференциальная C-алгебра с двумя свободными образующими $x \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^{(0)}$, $y \stackrel{\mathrm{def}}{=} y^{(0)}$, в которой сигнатурное дифференцирование переводит $x^{(i)}$, $y^{(j)}$ в $x^{(i+1)}$, $y^{(j+1)}$, соответственно. Упорядочим все мономы степени $\leq m$ от x и y следующим образом

$$x^m,\ x^{m-1}y,\ x^{m-2}y^2,\ \dots,\ xy^{m-1},\ y^m;\ x^{m-1},\ x^{m-2}y,\ \dots,\ xy^{m-2},\ y^{m-1};\ \dots;\ x^2,\ xy,\ y^2;\ x,\ y;\ 1.$$

Определитель Вронского этих элементов (это конкретный дифференциальный полином из F_2) обозначим $H_m(x, y)$.

Зададим дифференциальную C-алгебру $G_{m,n}$ дифференциальными образующими g_1, ..., g_n и дифференциальными определяющими соотношениями двух типов:

(a) $H_m(g_i, g_i') = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$,

(b) $H_m(g_i, g_j) = 0$ $(i \geq j; i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Предложение 1. *Для любого максимального идеала M дифференциальной C-алгебры $G_{m,n}$ образ этой алгебры при дифференциальном гомоморфизме Тэйлора $\widetilde{\psi}_M : G_{m,n} \to \mathbb{C}[[z]]$ обладает следующими свойствами:*

(i) степень трансцендентности $\widetilde{\psi}_M(G_{m,n})$ не превосходит единицы,

(ii) как коммутативно-ассоциативная C-алгебра $\widetilde{\psi}_M(G_{m,n})$ конечно порождена,

(iii) все степенные ряды $\bar{g}_1(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(g_1)$, ..., $\bar{g}_n(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(g_n)$ сходятся в некоторой окрестности нуля комплексной плоскости C^1.

Доказательство. Так как гомоморфизм Тэйлора — дифференциальный гомоморфизм, то $\widetilde{\psi}_M(G_{m,n})$ — дифференциальная C-подалгебра в $\mathbb{C}[[z]]$ относительно дифференцирования $\frac{d}{dz}$ и $\bar{g}_1(z)$, ..., $\bar{g}_n(z)$ — дифференциальные образующие $\widetilde{\psi}_M(G_{m,n})$. Если все

---

[1] **ФРОБЕНИУСОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УНИВЕРСУМЫ НА КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ**

[2] *Герасимова Ольга Вячеславовна* — асп. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ynona_olga@rambler.ru.

[3] *Размыслов Юрий Питиримович* — доктор физ.-мат. наук, сотр. лаб. выч. методов мех.-мат. ф-та МГУ, e–mail: ynona_olga@rambler.ru.

степенные ряды $\bar{g}_i(z)$ $(i=1,\ldots,n)$ являются константами, то утверждение предложения тривиально.

Пусть $\bar{g}_q(z) \neq const$ для некоторого $q \in \{1,\ldots,n\}$. Известно (см., например, [2]), что если определитель Вронского $|f_1(t),...,f_s(t)|$ степенных рядов $f_1(t)$,...,$f_s(t) \in k[[t]]$ равен нулю, то эти степенные ряды линейно зависимы над k. Поэтому из определения $H_m(x,y)$ и равенств $H_m(g_q,g_q')=0$, $0=(\widetilde{\psi}_M(H_m(g_q,g_q'))=H_m(\widetilde{\psi}_M(g_q),\widetilde{\psi}_M(g_q'))=H_m(\bar{g}_q,\bar{g}_q')$ заключаем, что степенные ряды $\bar{g}_q(z)$, $\bar{g}_q'(z)$ должны быть связаны некоторым нетривиальным полиномиальным соотношением $H(\bar{g}_q,\bar{g}_q')=0$, где $H(u,v)\in C[u,v]$ и степень H не превосходит m. Выберем среди таких полиномов многочлен наименьшей степени, тогда

а) $H(u,v)$ – неприводимый полином в $C[u,v]$ (так как $C[[z]]$ не содержит делителей нуля),

б) $\frac{\partial H}{\partial v}\neq 0$ (в противном случае $H(u,v)=H(u,0)=\alpha\cdot u+\beta\cdot 1$ и $\bar{g}_q(z)=const$),

в) $\frac{\partial H}{\partial v}|_{u=\bar{g}_q,v=\bar{g}_q'}\neq 0$ (так как степень $\frac{\partial H}{\partial v}$ строго меньше степени H)

и мы попадаем в досконально изученную (см. [3]) ситуацию.

Теорема (О.В. Герасимова). *Существует единственная с точностью до изоморфизма дифференциальная область целостности W_H, порожденная одним дифференциальным образующим w, для которого $w\neq const$ и $H(w,w')=0$, где $H(u,v)$ – неприводимый в $C[u,v]$ многочлен. Более того, степень трансцендентности W_H над C равна единице и как коммутативно-ассоциативная C-алгебра W_H конечно порождена.*

Поэтому дифференциальная C-подалгебра A_q, порожденная $\bar{g}_q(z)$ в $C[[z]]$, и ее поле частных $Q(A_q)$ имеют степень трансцендентности над C равную 1.

Аналогично из определяющих соотношений типа (b) алгебры $G_{m,n}$ и соотношений Вронского $H_m(\bar{g}_i,\bar{g}_j)=\widetilde{\psi}_M(H_m(g_i,g_j))=\widetilde{\psi}_M(0)=0$ заключаем, что элементы $\bar{g}_j$ алгебраичны над полем $Q(A_q)$, т.е. поле частных C-алгебры $\widetilde{\psi}_M(G_{m,n})$ совпадает с $Q(A_q)[\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_n]$ и является конечным расширением поля $Q(A_q)$. Следовательно, $\deg_C\widetilde{\psi}_M(G_{m,n})=1$, что доказывает свойство (i) C-алгебры $\widetilde{\psi}_M(G_{m,n})$.

Как было показано в работе [3] (см. теорему 1 и следствие из нее) свойства (ii) и (iii) C-алгебры $\widetilde{\psi}_M(G_{m,n})$ вытекают из свойства (i). Предложение 1 полностью доказано.

1.2. Обозначения и терминология. После обсуждения свойств (i), (ii), (iii) C-алгебры $G_{m,n}$ в предложении 1 нам кажется естественным придерживаться для любой дифференциально конечно порожденной дифференциальной C-алгебры (с единицей) B следующих обозначений и определений:

$\deg_C B$ – степень трансцендентности B над C,

$\mathrm{Spec}_C B$ – множество всех максимальных идеалов в B,

$\widetilde{\psi}_M : B\to C[[z]]$ – гомоморфизм Тэйлора в точке $M\in\mathrm{Spec}_C B$,

$\mathrm{RANG}_C B \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{M\in\mathrm{Spec}_C B}\deg_C\widetilde{\psi}_M(B)$ – ранг дифференциальной C-алгебры B,

$\widetilde{\psi}_{M_0}(B)$ – росток траектории в точке $M_0\in\mathrm{Spec}_C B$,

$\{M\in\mathrm{Spec}_C B | M\supseteq \mathrm{Ker}\,\widetilde{\psi}_{M_0}\}$ – замыкание орбиты, проходящей через точку $M_0\in\mathrm{Spec}_C B$,

$\{M\in\mathrm{Spec}_C B|$ все ряды из $\widetilde{\psi}_M(B)$ сходятся в некоторой окрестности нуля $\}$ – аналитический спетр дифференциальной C-алгебры B.

Такая терминология позволяет переформулировать предложение 1 и основные результаты нашей работы [3] (см. теорему 1 и следствие из нее) следующим образом.

Предложение 2. *Пусть ранг конечно порожденной дифференциальной C-алгебры B равен 1. Тогда ее спектр аналитичен, а замыкание орбиты, проходящей через произвольную точку спектра, – это неприводимая аффинная алгебраическая кривая (если не сама* *эта точка).* [4]

Очевидно, что класс конечно порожденных дифференциальных C-алгебр ранга ≤ 1 замкнут относительно взятия гомоморфных образов и локализаций таких алгебр по нениль-потентному элементу. По предложению 1 он содержит все алгебры $G_{m,n}$. Есть ли существенно другие объекты в выделенном классе? Ответ будет дан ниже.

В конце этой рубрики мы предлагаем читателю (в качестве упражнения) самостоятельно ответить на два вопроса.

Вопрос 1. Какие счетномерные дифференциальные C-алгебры (с единицей и без нильэлементов) имеют ранг, равный нулю?

Вопрос 2. Каков ранг свободной дифференциальной C-алгебры $F_1 \stackrel{\text{def}}{=} C[x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots]$ с одним свободным образующим $x \stackrel{\text{def}}{=} x^{(0)}$ $((x^{(i)})' \stackrel{\text{def}}{=} x^{(i+1)})$?

2. Аффинные дифференциальные C-алгебры. Пусть X – аффинное комплексное алгебраическое многообразие, $C[X]$ – его алгебра регулярных функций ($X = \operatorname{Spec}_C C[X]$).

Лемма 1. *Если многообразие X неприводимо и не является точкой, то оно не может быть объединением счетного числа своих собственных подмногообразий.*

Доказательство (Э. Б. Винберг). Индукция по размерности многообразия X.

Дифференциальную C-алгебра $C[X]$ относительно некоторого фиксированного (ненулевого) дифференцирования D будем называть аффинной дифференциальной C-алгеброй и обозначать $C_D[X]$. (Дифференцирование D задает на многообразии X векторное поле и определенные выше понятия: росток траектории в точке $M \in X$, замыкание орбиты, проходящей через M, (как и задача Коши) допускают естественную интерпретацию.)

Следующее утверждение дает описание аффинных дифференциальных C-алгебр ранга 1.

Предложение 3. *Пусть a_1, ..., a_q – произвольные дифференциальные порождающие аффинной дифференциальной алгебры $C_D[X]$ неприводимого многообразия X. RANG_C $C_D[X] \leq 1$ тогда и только тогда, когда $C_D[X]$ является (дифференциальным) гомоморфным образом C-алгебры $G_{m,q}$ ($g_1 \to a_1$, ..., $g_q \to a_q$) для некоторого натурального m, т.е. в $C_D[X]$ выполняются дифференциальные соотношения:*

(a) $H_m(a_i, a_i') = 0$, $(i = 1, 2, \dots, q)$,

(b) $H_m(a_i, a_j) = 0$, $(i \geq j; i = 1, 2, \dots, q)$.

Доказательство. Пусть I_m – дифференциальный идеал в $C_D[X]$, соответствующий дифференциальным соотношениям (a), (b). Этот идеал определяет некоторое аффинное подмногообразие X_m в X. Если $\mathrm{RANG}_C C_D[X] \leq 1$, то для произвольного максимального идеала $M \in X$ в образе $\widetilde{\psi}_M(C_D[X])$ элементы $\bar{a}_i \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(a_i)$, $\bar{a}_i' \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(D(a_i))$ $(i = 1, \dots, q)$ должны быть связаны (попарно) некоторыми нетривиальными полиномиальными соотношениями. Обозначим n максимум степеней таких многочленов, но тогда все определители Вронского $H_n(\bar{a}_i, \bar{a}_i') = \widetilde{\psi}_M(H_n(a_i, a_i'))$, $H_n(\bar{a}_i, \bar{a}_j) = \widetilde{\psi}_M(H_n(a_i, a_j))$ в степенных рядах $C[[z]]$ равны нулю. Следовательно, $M \in X_n$ и $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, т.е. неприводимое многобразие X – это счетное объединение своих подмногообразий. Из леммы 1 заключаем, что $X = X_m$ для некоторого m, что и доказывает наше утверждение.

Следствие. *В произвольной аффинной дифференциальной алгебре $C_D[X]$ ранга 1 (X – неприводимое многообразие) любая дифференциально конечно порожденная C-подалгебра A относительно дифференцирования D является гомоморфным образом некоторой C-алгебры $G_{m,s}$, в частности имеет ранг не больше единицы.*

Доказательство. Дополним дифференциальные образующие a_1, ..., a_s C-подалгебры A до конечной системы дифференциальных порождающих $C_D[X]$. Тогда по уже дока-

[4]“Впечатляет! Не правда ли?”

занному на этой системе образующих должны выполняться все соотношения (a), (b) для некоторого натурального числа m. Но эти соотношения имеют место и для подмножества дифференциальных образующих a_1, ..., a_s, т.е. A – гомоморфный образ $G_{m,s}$ $(g_i \to a_i)$. Утверждение следствия полностью доказано.

Здесь, как нам кажется, уместно сделать в нашем изложении небольшую передышку.

3. Кулоново поле и его ранг. Зададим коммутативно-ассоциативную дифференциальную C-алгебру (с единицей) R дифференциальными образующими x, y, r, r^{-1} и дифференциальными определяющими соотношениями

$x'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3} \cdot x$, $y'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3} \cdot y$, $r^2 = x^2 + y^2$, $r \cdot r^{-1} = 1$,

где $0 \neq k \in C$. Обозначим $R_{\sigma_{0,1}}$ локализацию алгебры R по элементу $\sigma_{0,1} \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y' - x' \cdot y$. Как было показано в работах [3], [4], [5] для произвольного максимального идеала $M \in \text{Spec}_C R_{\sigma_{0,1}}$ степенные ряды $\bar{x}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(x)$, $\bar{y}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(y)$, связаны соотношениями

(i) $H(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $0 \neq \bar{x} \cdot \bar{y}' - \bar{x}' \cdot \bar{y} = \sigma = \bar{x}(0) \cdot \bar{y}'(0) - \bar{x}'(0) \cdot \bar{y}(0) \in C$,

где $H(u, v)$ – неприводимый квадратичный полином, из которых (из-за отсутствия особых точек на кривой $H(u, v) = 0$) последовательно устанавливаются следующие свойства:

(ii) $L(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (\bar{x}(z), \bar{y}(z)) = \sigma \cdot (-\frac{\partial H}{\partial v}, \frac{\partial H}{\partial u})|_{u=\bar{x}, v=\bar{y}}$, где $L(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial u} \cdot u + \frac{\partial H}{\partial v} \cdot v$;

(iii) $L(\bar{x}, \bar{y})$ – обратимый элемент в $\widetilde{\psi}_M(R_{\sigma_{0,1}})$, который с точностью до числового множителя совпадает с $\bar{r}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\psi}_M(r)$ (см. формулы Н. Никчемного в работе [4]);

(iv) как коммутативно-ассоциативная C-алгебра $\widetilde{\psi}_M(R_{\sigma_{0,1}})$ порождается тремя элементами $\bar{x}$, $\bar{y}$, $(L(\bar{x}, \bar{y}))^{-1}$.

Поэтому поле частных C-алгебры $\widetilde{\psi}_M(R_{\sigma_{0,1}})$ совпадает с полем рациональных функций $C(X_H)$ квадратичной кривой X_H (заданной уравнением $H(u, v) = 0$), которое (см. [6]) в свою очередь является полем комплексных рациональных функций от одной переменной. Следовательно, степень трансцендентности $\widetilde{\psi}_M(R_{\sigma_{0,1}})$ равна 1 для любого $M \in \text{Spec}_C R_{\sigma_{0,1}}$ и $\text{RANG}_C R_{\sigma_{0,1}} = 1$ в задаче двух тел. [5]

Так как $R_{\sigma_{0,1}}$ - аффинная дифференциальная C-алгебра и область целостности, то из следствия предложения 3 вытекает, что любая однопорожденная дифференциальная C-подалгебра в $R_{\sigma_{0,1}}$ имеет ранг ≤ 1 и в ней для ее дифференциального образующего w должно выполняться одно из характеристических соотношений $H_m(w, w') = 0$. Как число m зависит от выбора $w \in R_{\sigma_{0,1}}$?

Если $w = r$, то ответ мгновенно следует из "фундаментального" равенства

$\frac{1}{2} \cdot ((\bar{r}'(z))^2 + \frac{\sigma^2}{\bar{r}^2(z)}) - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k}{\bar{r}(z)} = E/m_e$ $(E, \sigma \in C\ )$,

утверждающего, что дифференциальные мономы $r^2 \cdot (r')^2$, r^2, r, 1 становятся линейно зависимыми после применения к ним любого гомоморфизма Тэйлора. Следовательно, $m = 4$. Разумеется, соотношение $H_4(r, r') = 0$ очень грубо отражает конкретную ситуацию $w = r$, так как в нем можно заменить $H_4(r, r')$ на определитель Вронского $|r^2 \cdot (r')^2, r^2, r, 1|$.

Вопрос: "Почему со времен предшественников Роберта Гука в учебниках не содержится ничего подобого для $w = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ $(\alpha, \beta \in C)$?" [6]

4. Азы алгебраической теории Браге–Декарта–Уоттона. [7] Везде в этой рубрике C-алгебра A - это дифференциально конечно порожденная область целостности. Установим сначала, что результаты пункта 2 справедливы для произвольных таких C-алгебр ранга 1.

4.1. Предварительные сведения.

---

[5] Мы не сомневаемся в том, что читатель, добравшийся до этого места, уже засучил рукава и самостоятельно пытается выяснить, чему равен ранг О. Герасимовой в задаче трех тел.

[6] Ответ: "Потому, что это не нужно ..."

[7] см. также одноименную рубрику в работе [4]

Лемма 2. *Если в A нет свободных дифференциальных C-подалгебр, то в A есть такой элемент a, локализация A_a по которому конечно порождена, как коммутативно-ассоциативная C-алгебра, т.е. A_a - аффинная дифференциальная C-алгебра и* $\mathrm{RANG}_C A \leq \deg_C A = \deg_C A_a \neq \infty$

Доказательство. Пусть a_1, ..., a_n – дифференциальные образующие A. Рассмотрим цепочку элементов a_i, a_i', ..., $a_i^{(q)}$, ... Из условия леммы заключаем, что среди них должны быть алгебраически зависимые. Пусть $P_i(x_0, x_1, \ldots, x_{m_i})$ – ненулевой полином наименьшей степени, для которого $P_i(a_i, a_i', \ldots, a_i^{(m_i)}) = 0$. Дифференцируя это равенство получаем соотношение

$$0 = (\frac{\partial P_i}{\partial x_{m_i}} \cdot a_i^{(m_i+1)} + \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \cdot a_i^{(j+1)})|_{x_0=a_i, x_1=a_i', \ldots, x_{m_i}=a_i^{(m_i)}}.$$

Но тогда все $a_i^{(m_i+j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ лежат в локализации A_{e_i} алгебры A по элементу $e_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial P_i}{\partial x_{m_i}}|_{x_j = a_i^{(j)}\ (j=0,1,\ldots,m_i)}$. Положим $a \overset{\text{def}}{=} e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n$. Тогда локализация $A_a \overset{\text{def}}{=} A[a^{-1}]$ является дифференциальной C-алгеброй, которая как коммутативно-ассоциативная C-алгебра порождается элементами a^{-1}, $a_i^{(j)}$, где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m_i$. Это доказывает, что A_a – это аффинная дифференциальная C-алгебра. Остальные утверждения леммы теперь очевидны.

Следствие. *Если в A нет свободных дифференциальных C-подалгебр, то ее аналитический спектр содержит главное открытое множество* $\{M \in \mathrm{Spec}_C A | a(M) \neq 0\}$.

Лемма 3. *Если A содержит свободную дифференциальную C-подалгебру, то* $\mathrm{RANG}_C A = \infty$.

Доказательство немедленно вытекает из следующего фундаментального утверждения: *если A содержит некоторую свободную дифференциальную C-алгебру, то в A можно найти такую свободную дифференциальную C-подалгебру F_1 с одним свободным образующим x, что любой максимальный идеал в F_1 поднимается до максимального идеала в A* (см. [7]). Поэтому $\mathrm{RANG}_C A \geq \mathrm{RANG}_C F_1 = \infty$. (Действительно, рассмотрим дифференциальный C-гомоморфизм $\varphi_m : F_1 \to C[[z]]$, при котором $\varphi_m(x) \overset{\text{def}}{=} e^{\lambda_1 \cdot z} + \cdots + e^{\lambda_m \cdot z}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C$ линейно независимы над подполем рациональных чисел Q. Тогда дифференциальная C-подалгебра $\varphi_m(F_1)$ в $C[[z]]$ относительно дифференцирования $\frac{d}{dz}$ будет содержать все экспоненты $e^{\lambda_1 \cdot z}$, ..., $e^{\lambda_m \cdot z}$, которые алгебраически независимы над C. Так как любой гомоморфизм $\varphi : F_1 \to C[[z]]$ является гомоморфизмом Тэйлора, то $\max_\varphi \deg \varphi(F_1) > 1, 2, \ldots, m, \ldots$, т.е. $\mathrm{RANG}_C F_1 = \infty$.) Лемма 3 полностью доказана.

4.2. Теорема 1. *Любая n-порожденная дифференциальная C-алгебра B ранга 1, не содержащая нильэлементов, является гомоморфным образом дифференциальной C-алгебры Герасимовой $G_{m,n}$ для достаточно большого натурального числа m. Более того, все дифференциальные C-подалгебры в B имеют ранг ≤ 1.*

Доказательство. По теореме Роденбаха–Ритта (см. [8]) C-алгебра B является конечным поддекартовым произведением дифференциальных областей целостности. Более точно, в B существуют такие дифференциальные идеалы $I_1, \ldots, I_s$, что а) $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_s = 0$, б) $A_i \overset{\text{def}}{=} B/I_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ – области целостности. Обозначим b_1, ..., b_n дифференциальные образующие B, и пусть $\varphi_i : B \to A_i$ – канонические (дифференциальные) эпиморфизмы. Тогда, так как ранг $\varphi_i(B)$ равен 1, то по лемме 3 A_i не может содержать свободных дифференциальных C-подалгебр, а по лемме 2 A_i – дифференциальная C-подалгебра некоторой аффинной дифференциальной C-алгебры и $\varphi_i(b_1)$, ..., $\varphi_i(b_n)$ – ее дифференциальные образующие. Следовательно, из следствия предложения 3 вытекает, что A_i является гомоморфным образом C-алгебры $G_{m_i,n}$ $(g_j \to \varphi_i(b_j)$ $(j = 1, \ldots, n))$ и на образующих $\{\varphi_i(b_j) | j = 1, \ldots, n\}$ должны выполняться соотношения

а) $H_{m_i}(\varphi_i(b_j), \varphi_i(b_j')) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, б) $H_{m_i}(\varphi_i(b_j), \varphi_i(b_t)) = 0$ $(j > t; j, t =$

$1, 2, \ldots, n)$.
Откуда, полагая $m \stackrel{\text{def}}{=} \max_i m_i$, заключаем (так как $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_s = 0$), что на b_1, ..., b_n выполняются соотношения

а) $H_m(b_j, b'_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, б) $H_m(b_j, b_t) = 0$ $(j > t; j, t = 1, 2, \ldots, n)$, которые обеспечивают то, что B является гомоморфным образом C-алгебры $G_{m,n}$ $(g_j \to b_j$ $(j = 1, \ldots, n))$. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Дословно повторяя рассуждение в доказательстве следствия предложения 3, получаем, что любая дифференциально конечно порожденная C-подалгебра в B имеет ранг ≤ 1. Но тогда для каждой дифференциальной C-подалгебры E в B при гомоморфизме Тэйлора $\widetilde{\psi}_M : E \to C[[z]]$ (M пробегает $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}} E$) любые степенные ряды $\widetilde{\psi}_M(e_1)$, $\widetilde{\psi}_M(e_2)$ (e_1, e_2 пробегают E) должны быть связаны нетривиальным полиномиальным соотношением. Следовательно, $\deg_C \widetilde{\psi}_M(E) \leq 1$, а это означает, что $\mathrm{RANG}_C E \leq 1$. Утверждение теоремы полностью доказано.

4.3. Следствие. *Дифференциальная C-алгебра B с дифференциальными образующими b_1, ..., b_q имеет ранг ≤ 1 тогда и только тогда, когда существуют такие натуральные числа m, n, что*

а) $(H_m(b_j, b'_j))^n = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$, б) $(H_m(b_i, b_j))^n = 0$ $(i > j; i, j = 1, 2, \ldots, q)$.

Доказательство. Обозначим Rad B множество всех ниль-элементов в B. Так как алгебра степенных рядов $C[[z]]$ не имеет делителей нуля, то $\widetilde{\psi}_M(\mathrm{Rad}\ B) = 0$ при любом $M \in \mathrm{Spec}_C B$, а это означает, что Rad B – дифференциальный идеал в B и ранги дифференциальных C-алгебр B и $B/\mathrm{Rad}\ B$ совпадают. Обозначим φ канонический эпиморфизм $B \to B/\mathrm{Rad}\ B$.

Если ранг B равен 1, то по теореме 1 фактор алгебра $B/\mathrm{Rad}\ B$ является гомоморфным образом некоторой алгебры $G_{m,q}$ $(g_i \to \bar{b}_i$ $(i = 1, \ldots q))$ и на ее образующих $\bar{b}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(b_1)$, ..., $\bar{b}_q \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(b_q)$ должны выполняться соотношения

а) $H_m(\bar{b}_j, \bar{b}'_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$, б) $H_m(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = 0$ $(i > j; i, j = 1, 2, \ldots, q)$.
Следовательно, все $H_m(b_j, b'_j)$, $H_m(b_i, b_j)$ принадлежат Rad B, т.е. являются ниль-элементами. Выбирая число n достаточно большим получаем доказательство следствия в одну сторону.

Если для дифференциальных образующих b_1, ..., b_q в C-алгебре B выполняются указанные в формулировке следствия соотношения, то в $B/\mathrm{Rad}\ B$ для ее образующих $\bar{b}_1$, ..., $\bar{b}_q$ выполняются все соотношения

а) $H_m(\bar{b}_j, \bar{b}'_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$, б) $H_m(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = 0$ $(i > j; i, j = 1, 2, \ldots, q)$,
т.е. $B/\mathrm{Rad}\ B$ является гомоморфным образом дифференциальной C-алгебры $G_{m,q}$ и $1 \geq \mathrm{RANG}_C(B/\mathrm{Rad}\ B) = \mathrm{RANG}_C(B)$, что завершает доказательство утверждения следствия.

4.4. Дифференциальные C-алгебры ранга 1. Обозначим Γ_1 класс дифференциальных C-алгебр B, у которых все дифференциально конечно порожденные C-подалгебры имеют ранг ≤ 1. Очевидно, что этот класс замкнут относительно взятия дифференциальных C-подалгебр и гомоморфных образов. Внимательный читатель легко заметит, что встречавшиеся до сих пор в формулировках утверждений дифференциальные C-алгебры и C-подалгебры принадлежат Γ_1. Последние результаты Г. А. Погудина позволяют ослабить условия, накладываемые на C-подалгебры этого класса.

Теорема 2. *Класс Γ_1 состоит из дифференциальных C-алгебр B, в которых для любого элемента w из B выполняется равенство вида $(H_m(w, w'))^n = 0$ $(m = m(w), n = n(w))$.*

Из определения класса Γ_1 и следствия теоремы 1 заключаем, что доказательство теоремы 2 сводится к обоснованию следующего утверждения.

Предложение 4. *Конечно порожденная дифференциальная C-алгебра B имеет ранг ≤ 1, если ранг любой ее однопорожденной дифференциальной C-подалгебры не превосхо-*

дит единицы.

Доказательство этого факта разобьем на три части.

1. *C-алгебра B не содержит делителей нуля.* В этом случае утверждение предложения сразу следует из фундаментального результата Г. А. Погудина (см. [9]): *если в B нет свободных дифференциальных C-подалгебр, то поле частных B совпадает полем частных $Q(A)$ некоторой дифференциально однопорожденной в B C-подалгебры A.* (Действительно, по лемме 3 B не может содержать однопорожденных свободных подалгебр, изоморфных F_1, поэтому дифференциальные образующие b_1, ..., b_q C-алгебры B лежат в $Q(A)$ и по лемме 2 в A найдется такой элемент a, что а) b_1, ..., $b_q \in A_a$, б) A_a – аффинная дифференциальная C-алгебра ранга ≤ 1, т.е. B дифференциально конечно порожденная C-подалгебра в A_a и из следствия предложения 3 получаем, что $\mathrm{RANG}_C B \leq 1$.)

2. *C-алгебра B не содержит ниль-элементов.* Тогда, как было отмечено в при доказательстве теоремы 1 в B найдутся дифференциальные идеалы $I_1, \ldots, I_s$ такие, что а) $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_s = 0$, б) $A_i \stackrel{\text{def}}{=} B/I_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ – области целостности, для которых неравенство $\mathrm{RANG}_C A_i \leq 1$ уже было доказано на первом этапе. Следовательно, A_i являются гомоморфными образами некоторых C-алгебр Герасимовой $G_{m_i,q}$. Но тогда выбирая $m = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$ заключаем (так как $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_s = 0$), что B – гомоморфный образ $G_{m,q}$ и $\mathrm{RANG}_C B \leq 1$.

2. *Общий случай:* $\mathrm{Rad}\ B \neq 0$. Как мы видели выше $\mathrm{RANG}_C B = \mathrm{RANG}_C (B/\mathrm{Rad}\ B)$. В фактор алгебре $B/\mathrm{Rad}\ B$ нет нильпотентных элементов, поэтому (как было доказано на втором этапе) ее ранг ≤ 1. Следовательно и ранг B не превосходит единицы.

Сказано было (см. [10]) о Тихо Браге: “Мастерство не пропьешь. Так гласит дворовая мудрость. Но его и не передашь. Уходит человек и это уходит вместе с ним. Остаются ученики, последователи и ремесло.” So it goes, так сказать, – извечный картезианский вопрос: “Стоит ли все уносить с собой?”

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.

2. *Герасимова О.В., Погудин Г.А., Размыслов Ю.П.* Rolling simplexes and their commensurability, III (соотношения Капелли и их применение в дифференциальных алгебрах). // Фундаментальная и прикладная математика, том 19, выпуск 6, 2014, стр. 7-24.

3. *Герасимова О.В., Размыслов Ю.П.* Неаффинных дифференциально–алгебраических кривых не существует. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. N 3. 3–8.

4. *Размыслов Ю.П.* Законы катящихся симплексов. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. N 6. 55–58.

5. *Герасимова О.В.* Rolling simplexes and their commensurability, II (лемма о директрисе и фокусе). // Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, выпуск 1, стр. 13-19.

6. *И. Р. Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии. М.: МЦНМО, 2007.

7. *Pogudin G.A.* The primitive element theorem for differential fields with zero derivation on the base field // Journal of Pure and Applied Algebra, 2015. v. 219. N 9. 4035–4041.

8. *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. М.: ИЛ, 1959.

9. *Pogudin G.A.* A Differential Analog of the Noether Normalization Lemma. // International Mathematics Research Notices, 2016, v. 191, N 00, 2–23.

10. *Razmyslov Yu.P.* An explanation (field equations in accordance with Tucho Brahe). // Journal of Mathematical Sciences. 2013, v. 191, N 5, 2013, стр. 726–742.