UDK 512.543.7 + 512.544.33 + 512.815.8 + 517.984.5 + 514.84

Dedicated to my mother

ROLLING SIMPLEXES AND THEIR COMMENSURABILITY, 2 (FIELD EQUATIONS IN ACCORDANCE WITH TYCHO BRAHE)

Master Key
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pogudin.gleb@gmail.com.

Annotation: Various Cartesian models of central power fields with quadratic dynamics are studied. These examples lead the reader to comprehension of basic aspects of differential algebraic-geometrical Brahe – Descartes – Wotton theory, which embraces central power fields whose dynamics is composed of flat affine algebraic curves of degree at most N ($N = 1, 2, 3, \ldots$). When $N = 2$, a **quadratic rolling simplexes law** is proved by purely algebraic means.

Key words: *field, Cartesian plane, affine chart, rolling, incompressibility, quadratic curve, focus, directrix, gravitation, promeasure, prometric, differential algebra.*

“Чистый, не знающий пределов разум есть само божество.” Гегель.

The notes below do not talk about foundations of cosmic navigation and basics of field theory. They are written neither for fans of science fiction, nor for “proud and learned” scientists (see [1]). They are for those who following me will read them again. These are my thoughts on our education. About the ways and reasons explaining one how and why we are all together proved where to be predestined. Hoping for the future, skeptically referring to the past, indulging a wishful thinking, one is aware and knows (or he does think so), the other tries to calculate what is in advance waiting us for. I am not impartial. My sympathy entirely lies on the side of such masters as Democritus, Tycho Brahe, Descartes, Cavendish, Faraday, Maxwell. But I have to be objective.

“I like persons better than principles
and I like persons with no principles
better than anything.” H. Wotton.

1. There are principles at stake that one cannot surrender. When I was a second-year student, my desk-mate Yuli Koshevnik drew a circle on a blank sheet of paper and offered me to plot a point. Feeling some kind of trick I put it, just in case, not at the center of the circle, but a little to the left. Then Yuli pictured a typical child drawing of a house with chimney on the same sheet and asked me to raise smoke from it. I cautiously directed it straight up. He solemnly claimed that Albert Einstein put a point outside of the circle and directed smoke in such a way that the house became looking like a rhinoceros preparing to fight. Somehow it is branded on my memory just as the fact that at the end of the second semester of our studies Eugene Solomonovich Golod frayed our nerves when he offered to draw a perpendicular to a fixed point from a given line in the well-known model of the Lobachevsky plane with the use of an ordinary compasses and ruler.

I recalled those tests on mediocrity many years later, when I was finishing my manuscript [2]. Looking through popular series, in which names such as Copernic, Kepler, Galileo, and Newton were praised up to the skies, I suddenly realized that Tycho Brahe (1542 - 1601), who laid an experimental foundation and launched the development of technical principles of the future celestial mechanics (Kepler worked at his observatory), was aware of the following fact.

Proposal (T. Brahe). *All points of intersection of tangent lines to a circle which pass through the ends of bisectants intersecting at one point inside of the circle lie on a straight line.*

Proof (Descartes). Let us perform a projective transformation over an affine plane that maps the circle into itself and the point of intersection of bisectants into its center.

At that moment the ring was circled, solution to the task suggested by E.S. Golod and the tests of Yu. Koshevnik recurred to me. It has dawned on me that in the 17th century, R. Descartes had already walked through the “wall” of quadratic curve. In his doubts about the location of the center of the world, Tycho Brahe was not as judgemental as Kepler, who put that center at its focus. “Directrix” and “focus” were still coexisting as two shoulder yoke, and were not bound to a particular metrics. The way was still open. The barrier was set up later.

“De Omnibus Dubitandum.” R. Descartes.

2. Cartesiana: several examples of central fields, in each of which every movement is realized over its quadratic curve. In the three-dimensional affine space K^3 ($K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$) a “centripetal” movement $\vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ round the point O is characterized in any affine coordinate system with the origin at $O \stackrel{\mathrm{def}}{=} (0,0,0)$ by the vector equality $[\vec{R}(t), \vec{R}''(t)] = \vec{0}$, which leads to $\frac{d}{dt}([\vec{R}(t), \vec{R}'(t)]) = \vec{0}$ and $[\vec{R}(t), \vec{R}'(t)] = (i_1, i_2, i_3)$, where $i_1, i_2, i_3 \in K$. That is why the space curve $\vec{R}(t)$ lies on a plane given by the equation $i_1 \cdot x + i_2 \cdot y + i_3 \cdot z = 0$. So, our further consideration is reduced to flat models of central fields.

2.1. Galileo fields – uniformly accelerated motion: $x''(t) = g_x$, $y''(t) = g_y$ $(g_x, g_y \in K)$. In this case point O lies on the ideal line in direction of the vector (g_x, g_y).

2.2. Harmonic oscillator: $(x''(t), y''(t)) = -h \cdot (x(t), y(t)) \quad (h \in K)$.

2.3. Coulomb fields: $(x''(t), y''(t)) = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k}{(r(t))^3} \cdot (x(t), y(t)) \quad (r^2 = x^2 + y^2, k \in K)$.

2.4. Ptolemy fields. Classics of genre:

$(x''(t), y''(t)) = -2 \cdot \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{x^2(t) + y^2(t) - \delta} \cdot (x(t), y(t))$ $(\delta \in K)$.

When $\delta > 0$ ($\delta \in \mathbf{R}$) the quantity $r_\delta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \delta^{1/2}$ is called the *radius of celestial sphere* (a prototype of Schwarzschilde radius).

2.5. Solar oscillator (volnokhron).

2.6. Theorem. *Any analytic solution* $x(t), y(t), \tau(t)$ $(x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t) \neq 0)$ *of equations* 2.5.1 *with respect to complex variable t satisfies equations* 2.5.2, *and any analytic solution of system* 2.5.2 *satisfies equations* 2.5.1. *In particular, every curve* $\vec{R}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (x(t), y(t), \tau(t))$ *is flat and contained in a quadratic one.*

2.7. E.-G.-H.-universum. Equations 2.5.1, 2.5.2 defining differential algebra S admit first integrals, by means of which E.-G. algebra S can be realized in a more habitual way, one should say.

2.7.1. s_0**-deformation.**

2.7.2. A black point (Garin – Hooke accelerator).

2.8.

2.9.Theorem. *Localization* $B_2[\sigma_{1,2}^{-1}]$ *of algebra* B_2 *by* $\sigma_{1,2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (x' \cdot y'' - x'' \cdot y')$ *is an integral domain, and its quotient field* $Q(B_2[\sigma_{1,2}^{-1}])$ *is generated by seven algebraically independent elements. Moreover, the subfield of constants* $\{u \in Q(B_2[\sigma_{1,2}^{-1}]) |\ u' = 0\}$ *is isomorphic to a field of rational functions of six independent variables.*

Till this moment we were led in our narration by pure reason. But rumors, from time to time, have brought in tidings to us from the bank of the Thames. It is the time to despise common sense and dive into the depths of their paradigm.

“Не измышляйте сущностей сверх меры”
Вильям Оккам (1300 – 1349)

3. The history and the time: афера или заговор мастеров? В 1634 году, проживая в Голландии, Рене Декарт, сотрудник действующего резерва гвардии его высокопреосвященства кардинала Ришелье, в письме к одному из своих корреспондентов так выразил свое кредо: “Чтобы жить хорошо, надо жить незаметно.” Время было непростое. В воздухе, разумеется, не витали идеи, связанные с гиперболоидом инженера Гарина – из уст в уста передавались циркулирующие слухи о женщине, летящей на помеле. Приходилось не только взаимодействовать и сотрудничать с представителями местных правоохранительных органов и прообразом будущей британской “Интелледженс Сервис”, но и ладить со спецслужбами святой инквизиции: доминиканцами, францисканцами, иезуитами, – ведя постоянную просветительскую работу, в первую очередь, не на подвластных последним территориях. Судьбы Коперника, Джордано Бруно, Галилея показывали, что плетью обуха не перешибить. Требовалось создание и воспитание и в науке, и в образовании кадров нового типа. Зрело понимание того, что сектантскими способами эту задачу не решить. Необходимы были институты. И на первом этапе реализации задуманного эту часть проблемы взяли на себя специализированные колледжи и монастыри.

Это было время титанов. Философов-стратегов. Замысла грандиозного проекта, рассчитанного не на сиюминутную выгоду. На века. Упор делался не на изучение уже полученных результатов и истин, а на их переоткрытие в головах других, на усвоение разработанных и поиске новых методов исследования, благодаря чему многократно возрастало число их сторонников, для которых открытия становились не чужими, а своими. Тонко был учтен чисто психологический элемент: "Завоеванное в бою ценится дороже." Подлинные герои в соответствии с кредо не имели права высовываться, должны были оставаться в тени.

Обстоятельства благоприятствовали очередному прорыву, момент был удобным:

а) Кеплер уже опубликовал выводы наблюдений обсерватории Тихо Браге,

б) Декарт заложил и разработал основы аналитической геометрии, позволявшей перевести искусство геометрических рассуждений о свойствах кривых второго порядка в рутину численных и символьных вычислений,

в) он же возродил понятие силы, как сущности, вызывающей ускорение.

Все сложилось само собой.

"Разверзлась бездна – звезд полна. Звездам числа нет, бездне дна."
М. В. Ломоносов.

3.1. The bait: законы Кеплера. Говорят, что простых решений не бывает. Вполне возможно. Но времена, в результате длительной, кропотливой обработки экспериментальной базы, рождают иногда наглядные модели, допускающие незамысловатую, адекватную формализацию и честную их интерпретацию.

О законах Кеплера сейчас можно узнать из школьных учебников.

3.1.1. 1-й закон. *Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится солнце.*

3.1.2. 2-й закон. *Радиус-вектор, проведенный от солнца к планете, в равные промежутки времени заметает равные площади.*

3.1.3. 3-й закон. *Квадраты времен обращения планет относятся между собой как кубы больших полуосей орбит.*

3.2. The hook: формализация. Не так широко известно, что уже Аристотель знал, как устроены все проекции плоских сечений конуса вращения на ортогональную оси плоскость, проходящую через его вершину, а именно:

а) любая кривая второго порядка в этой плоскости с фокусом в вершине получается таким способом;

б) все проекции, не являющиеся прямыми или парами прямых, представлютя из себя кривые второго порядка с общим фокусом.

С введением в математический обиход основ аналитической геометрии стало возможным выражать подобные утверждения на языке алгебраических уравнений. Возьмем в качестве пробного – конус вращени, задаваемый в евклидовой системе координат (x, y, r) уравнением $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Тогда для любой плоскости, определяемой равенством $r = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta$, проекция на плоскость (x, y) сечения, выделяемого двумя этими уравнениями, будет при $\delta \neq 0$ нетривиальной кривой второго порядка: $x^2 + y^2 - (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2 = 0$, и у нас получается

3.2.1. Интерпретация 1-го закона. *Все планеты двигаются по кривым второго порядка вида* $x^2 + y^2 - (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2 = 0$, $(\delta \neq 0, \alpha, \beta \in K)$. *Солнце находится в начале координат.*

Упражнение. Доказать, что фокусное расстояние от солнца у такой кривой равно δ.

3.2.2. Формализация 2-го закона. *В любой момент времени t радиус-вектор $\vec{R}(t) = (x(t), y(t))$, проведенный из начала координат к планете, удовлетворяет равенству $[\vec{R}(t), \vec{R}'(t)] = (x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t)) = \kappa$, где $\kappa \in K$. В частности, за любой промежуток времени Δt радиус-вектор $\vec{R}(t)$ заметает площадь равную $\frac{1}{2} \cdot |\kappa| \cdot \Delta t$, и $[\vec{R}(t), \vec{R}''(t)] = (x(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y(t)) = 0$.*

Аргументы в пользу адекватности такой трактовки второго закона хорошо известны и доступны студентам, владеющим элементами анализа в объеме первого курса. Однако ошибается тот, кто считает, что для такой интерпретации следует знать, что такое дифференцирование и интегрирование. (Во всяком случае, в привычном для большинства смысле. В конце концов, все можно списать на очередную гениальную догадку, ведь в семнадцатом веке писались утверждения и формулы покруче (см. выше п.п. 2.8.1).) Действительно, рассмотрим равномерно движущийся объект. Тогда любой наблюдатель в произвольной точке пространства вне прямой движения обнаружит, что радиус-вектор от него к объекту заметает в равные промежутки времени равные площади, а так как формула $\frac{1}{2} \cdot |x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t)|$ площади треугольника, образованного векторами $\vec{R}(t), \vec{R}'(t)$ относится к азам аналитической геометрии, то он получит формулы утверждения 3.2.2 и автоматически примет результаты о прямой, как вполне правдоподобную гипотезу о равномерном (в смысле второго закона Кеплера) движении по любой кривой второго порядка. Его уверенность в правильности такого предположения подкрепит то, что при построении каждой точки кривой второго порядка, исходя из пяти ее произвольных точек, а также касательных прямых в этих точках в аффинной карте декартовой плоскости (см. [2]) достаточно пользоваться только угольником и линейкой. Ну а роллинг, позволяющий коструктивно перекатывать треугольники, образованные векторами $\vec{R}(t_1), \vec{R}'(t_1)$ и $\vec{R}(t_2), \vec{R}'(t_2)$, друг в друга, завершит дело. Уж если школьник на вступительном экзамене на мех-мат должен был уметь обосновывать элементарными средствами формулу площади сектора круга, то не нужно было иметь семь пядей во лбу, чтобы в семнадцатом веке и ранее проделать такую же работу для любого эллипса относительно произвольной его внутренней точки.

3.2.3. Солнечная постоянная Тихо Браге. Пусть a и b – большая и малая полуоси эллипса, а T – период обращения планеты вокруг солнца. Тогда для любых двух планет (i-ой и j-той) согласно п.п. 3.1.3 выполняется равенство $\frac{a^3(i)}{a^3(j)} = \frac{T^2(i)}{T^2(j)}$, которое можно переписать в виде $\frac{a^3(i)}{T^2(i)} = \frac{a^3(j)}{T^2(j)}$. Следовательно, отношение $\frac{a^3}{T^2}$ не зависит от номера планеты. Эту константу обозначим k_S и назовем *солнечной постоянной* Т. Браге. Теперь третий закон Кеплера можно переформулировать таким образом.

3.2.4. *Для любой планеты отношение куба большой полуоси эллипса, по которому она движется, к квадрату периода ее обращения вокруг солнца равно солнечной постоянной k_S.*

3.2.5. The mystery of three laws: $\kappa^2/\delta = 4 \cdot \pi^2 \cdot k_S$. Действительно, так как площадь эллипса равна $\pi \cdot a \cdot b$, то в силу п.п. 3.2.2 $T = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{|\kappa|/2}$. Но $a^3 = k_S \cdot T^2$ (см. п.п. 3.2.3) и $a^3 = k_S \cdot (\frac{\pi \cdot a \cdot b}{|\kappa|/2})^2$. Откуда следует, что $\kappa^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot k_S \cdot (b^2/a)$. Но b^2/a – это фокусное расстояние в эллипсе, а в п.п. 3.2.1 (см. упражнение) было подмечено, что фокусное расстояние кривой $x^2 + y^2 - (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2 = 0$ равно δ, что и доказывает соотношение между δ, κ и k_S.

3.2.6. Resume. Полученная формула позволяет по геометрическим характеристикам траектории планеты вычислять через солнечную постоянную Тихо Браге важные динамическую характеристики ее движения: скорость заметания площадей, период обращения, скорость в каждой точке.

3.3. The trap: от постулатов формализма к уравнениям динамики по Кеплеру. Представьте себе, что на временной оси в какой-то момент появляется Некто, кто

(а) пополняет привычную плоскость "идеальной" – бесконечно удаленной – прямой;

(б) понимает, что такое проективное преобразование пополненной плоскости, и способен этим пользоваться;

(в) вводит в научный обиход косоугольную систему и проводит в ней вычисления наравне с привычной прямоугольной;

(г) умеет в любой системе координат выражать уравнениями конус и плоскость в трехмерном пространстве, прямую и касательную к эллипсу на плоскости;

(д) открывает в классе рациональных функций от переменной t главный закон дифференциально-алгебраического формализма $(f(t)\cdot g(t))' = f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)$ и начинает трактовать термин "сила", как сущность, вызывающую только изменение скорости: $v'(t)$;

(е) догадывается и умеет обосновывать в частных случаях, что второй закон Кеплера равносилен тому, что вектор ускорения планеты направлен к солнцу;

(ж) выводит формулу для вычисления площади треугольника в произвольной системе координат, доказывает инвариантность полученного выражения относительно роллинга, указывает геометрический способ перекатывания треугольников, натянутых на векторы $R(0), R'(0)$ и $R(t), R'(t)$ друг в друга, когда концы радиус-векторов $R(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x(t), y(t))$ лежат на кривой второго порядка.

Независимо от того, где на оси находится Декарт, сложившаяся ситуация подсказывает этому никчемному Некто, что неплохо бы было для наглядности найти коэффициент пропорциональности между коллинеарными векторами $R(t)$ и $R''(t)$ и делает предварительный шаг.

3.3.1. The first step: вычисление вектора скорости $\vec{R}'(t)$. Эта процедура почти не отличается от выведения формулы касательной для кривой второго порядка. Кривая задается уравнением $x^2 + y^2 - (\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta)^2 = 0$, а ее параметризация уравнением $x(t)\cdot y'(t) - x'(t)\cdot y(t) = \kappa$ (см. п.п. 3.2.1 и 3.2.2). Подвергнув обе части первого равенства преобразованию "штрих" (см. свойство (д)) он получит систему двух уравнений для $x'(t)$ и $y'(t)$

$$2\cdot x'(t)\cdot x(t) + 2\cdot y'(t)\cdot y(t) - 2\cdot(\alpha\cdot x'(t) + \beta\cdot y'(t))(\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta) = 0,$$

$$x(t)\cdot y'(t) - x'(t)\cdot y(t) = \kappa$$

Решить ее Никчемному Некто труда не составит

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{-\kappa}{\delta\cdot d(t)}\cdot\begin{pmatrix} y(t) - \beta\cdot d(t) \\ -x(t) - \alpha\cdot d(t)) \end{pmatrix}, \qquad (!)$$

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\cdot x(t) + \beta\cdot y(t) + \delta \quad (d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)).$$

При этом он, в отличие от нас, уже знает, что прямая, задаваемая уравнением $\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta = 0$, – это "директриса" кривой $x^2 + y^2 - (\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta)^2 = 0$, и трактует ее в духе предложения из п.п. 1.

3.3.2. The second step: вычисление вектора ускорения $\vec{R}''(t)$. Набив руку на первом шаге в манипулировании "штрихом" (см. (д)) Некто Никчемный, "продифференцирует" обе части равенства (!) и, используя его еще раз для исключения из правой части вновь полученных равенств $x'(t), y'(t), d'(t)$, легко получит соотношения:

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \frac{-\kappa^2}{\delta}\cdot\frac{1}{d^3(t)}\cdot\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\cdot x(t) + \beta\cdot y(t) + \delta \quad (d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)).$$

3.3.3. In the grip of the formalism: уравнения динамики по Кеплеру. В силу третьего постулата (см. п.п. 3.2.3, 3.2.4) отношение κ^2/δ отличается от солнечной постоянной на числовой множитель $4\cdot\pi^2$. Поэтому можно переписать последние равенства в виде

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{r^3(t)}\cdot\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

где $r(t) = (x^2(t) + y^2(t))^{1/2}$.

3.3.4. Intellegence and mind: соотношения Н. Никчемного. Приверженец косоугольной системы координат постарается выйти за рамки постулатов формализма п.п. 3.2.1–4 и сделает третий шаг. Он попытается вычислить вектор центростремительного ускорения для любой кривой второго порядка, заданной уравнением

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b \cdot y + c = 0$$

и неизбежно получит соотношения

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = -\kappa^2 \cdot \frac{det \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{12} & a_{22} & b \\ a & b & c \end{array} \right)}{(a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c)^3} \cdot \left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right)$$

.

При $c \neq 0$ квадратичную кривую можно задать уравнением

$$\mu_{11} \cdot x^2 + 2\mu_{12} \cdot x \cdot y + \mu_{22} \cdot y^2 - (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2 = 0.$$

Тогда предыдущие равенства примут вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \frac{-\kappa^2}{\delta} \cdot det \left(\begin{array}{cc} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{12} & \mu_{22} \end{array} \right) \cdot \frac{1}{d^3(t)} \cdot \left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right),$$

где $d(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) + \delta \quad (d^2(t) = \mu_{11} \cdot x^2(t) + \mu_{12} \cdot x(t) \cdot y(t) + \mu_{22} \cdot y^2(t))$.

3.3.5. Girl dreams: [1] **± фокусировки плоских волн.** Объект сбрасывает скорость и внезапно “материализуется” на экране локатора, затем описывает дугу, ускоряется и исчезает, не достигнув края дисплея. Знакомая картина, не правда ли? Памятуя об истине, что незнание начинается до науки, а невежество после нее, я не стану давать какую-либо физическую интерпретацию последним формулам ускорения, а ограничусь сухой констатацией факта.

Теорема (Н. Никчемный). *Для любых аналитических решений* $x(t), y(t) \quad (dim_K(K \cdot x(t) + K \cdot y(t)) = 2)$ *(действительного или комплексного переменного) уравнений* п.п. 8.2, *задающих квадратичный хаос Тихо Браге, справедливы равенства* $\frac{x''(t)}{x(t)} = -\frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)} = \frac{y''(t)}{y(t)}$, *а при* $dim_K(K \cdot x'(t) + K \cdot y'(t)) = 2$ *линейные подпространства* $K \cdot 1 + K \cdot x(t) + K \cdot y(t) + K \cdot (x(t)/x''(t))^{1/3}$, $K \cdot x^2(t) + K \cdot x(t) \cdot y(t) + K \cdot y^2(t) + K \cdot (x(t)/x''(t))^{2/3}$ *не более чем трехмерны.*

3.4. The trick: От уравнений динамики к постулатам формализма. Второй из них более чем очевиден: $(x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t))' = [R(t), R'(t)]' = x(t) \cdot y''(t) - y(t) \cdot x''(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot k_S \cdot [R(t), R(t)] = 0$. (Мне не доводилось встречать ученого, который при решении дифференциальных уравнений после получения первых интегралов попытался начать в моем присутствии их дифференцировать. Трудно сказать, как я бы оценил подобную ситуацию. Возможно, что я счел бы его идиотом.) Умножим обе части равенства $(x''(t), y''(t)) = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k_S}{r^3(t)} \cdot (x(t), y(t))$, $(r(t) = (x^2(t) + y^2(t))^{1/2})$ скалярно на вектор $\vec{R}'(t) = (x'(t), y'(t))$. Тогда

$$\frac{1}{2} \cdot \left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)' = \left(\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k_S}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \right)'$$

и

$$\frac{1}{2} \cdot \left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right) - \left(\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k_S}{r(t)} \right) = E \qquad \left(E \in K, r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right).$$

(Студента, который начнет дифференцировать на экзамене в изученной вдоль и поперек ситуации выведенные им первые интегралы, вряд ли дослушают до конца. Возможность получения им

[1] Сверхскорости, UFO, летающие тарелки, гравитолеты, параболоид инж. Гарина, помело...

отличной оценки кажется мне крайне проблематичной.) Воспользуемся комбинаторным соотношением Клеро

$$(x')^2+(y')^2=\left(\frac{x\cdot x'+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{x\cdot y'-x'\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'\right)^2+\frac{\kappa^2}{x^2+y^2}$$

и перепишем равенство с буквой E следующим образом

$$\frac{1}{2}\cdot\left(r'(t)\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\kappa^2}{r^2(t)}-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{r(t)}=E.$$

Фортуне было угодно пролететь мимо меня дважды: независимо друг от друга, с разницей в двенадцать лет, две студентки попытались на моих глазах продифференцировать обе части этого равенства [2]

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\left(r'(t)\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\kappa^2}{r^2(t)}-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{r(t)}\right)'=(E)'. \qquad (!!)$$

3.4.1. Замечание. Тогда я не был знаком с народной мудростью, что умную женщину от дуры не отличишь. Признаюсь – в голову лезла более радикальная оценка происходящего. Но я взял себя в руки и направил дальнейшее обсуждение вопроса в привычное русло. Удивительная вещь наша память. В ней ничего не пропадает. В какой-то момент нужное (и ненужное) возникает в ней с поразительной ясностью. Я припомнил случившееся пару лет назад, когда обдумывал проблему раскрытия параметров и классификации полей в обобщенном хаосе Тихо Браге. Утверждение п.п. 2.6 и уравнения п.п. 2.7.1, 2.7.2 мною уже были получены и я постоянно к ним возвращался. В очередной раз что-то замкнулось и равенство (!!) мне показалось очень знакомым. В голову закралась крамольная мысль: “А какова во всем этом роль уравнения $x^2+y^2=r^2$, может быть евклидова метрика – это всего лишь удобный способ подсчета отношения двух ориентированных площадей $\frac{x'(t)\cdot y''(t)-y'(t)\cdot x''(t)}{x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t)}$?”

3.4.2. Подведение итогов и сбор урожая. Равенство (!!) можно переписать так $\left(r(t)-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2}\right)''=-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{r^3(t)}\cdot\left(r(t)-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2}\right)$ и перед нами возникает знакомая ситуация (см. п.п. 2.7.1)

$$\left(x(t),y(t),r(t)-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2}\right)''=-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{r^3(t)}\cdot\left(x(t),y(t),r(t)-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2}\right),$$

в которой вектор ускорения $(x''(t),y''(t),r''(t))$ коллинеарен вектору $(x(t),y(t),r(t)-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2})$ и направлен все время в одну точку $(0,0,\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2})$. Следовательно, кривая $(x(t),y(t),r(t))$ является плоской и соответствующая плоскость проходит через точку $(0,0,\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2})$. Поэтому $r(t)-\delta=\alpha\cdot x+\beta\cdot y$ (для подходящих $\alpha,\beta\in K$ и $\delta=\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2}$), что вместе с равенством $r^2(t)=x^2(t)+y^2(t)$ приводит к соотношениям $x^2(t)+y^2(t)=(\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta)^2$, $\delta=\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_S}{\kappa^2}$, которые выражают первый и третий постулаты формализма, соответственно.

3.5. An odd fish: 2-е озарение. Хорошо известно, что Ньютон был сторонником геометрической оптики и придерживался корпускулярного взгляда на природу возникновения света. Он резко выступал против теории эфира и вихрей Декарта. Согласно его воззрениям частица света должна лететь равномерно по естественной геодезической в трехмерном (аффинном декартовом!) пространстве с огромной, но постоянной скоростью. Можно только догадываться, какой шок должен был испытать Ньютон к концу жизни, когда первым, опередив на три века свое время, попытался заменить пробный конус $x^2+y^2-r^2=0$ на световой $x^2+y^2-c^2\cdot\tau^2=0$.

[2]Гром среди ясного неба. Самый разумный путь к цели. Обходятся все расставленные ловушки и соблазны: изничтожается горячо любимый физиками и столь дорогой сердцу механиков символ E.(Есть более короткий путь в обход E. Для этого надо просто продифференцировать комбинаторное соотношение Клеро.)

3.5.1. Emotions.

До сих пор мы все, Ньютон,
Чтим тебя, твой сан, твой дом.
Разве мог подумать он,
Что навек займет свой трон?

Да конечно, все при нем:
Массы, сила и закон.
Дыр не видно, спору нет:
Метрикой прикрыт проект,
Фокус сунули в просвет,
Директрису под запрет...

Но сквозит, сквозит проем –
Меру надо знать во всем!
Ведь ходить одним путем
Все равно что днем с огнем –
Ну ни капли мысли в том.

Роллинг есть и вихрем он
Сквозь эфир струит в объем
Разум, волю, дух, подъем,
Мирозданий новых сонм,
Превращая билдинг в лом.

* * *

Полем метрику чуть ткни,
Вмеру карту подцепи,
И тогда уж не вернуть,
Мир, что удалось проткнуть...

3.5.2. Мастерство не пропьешь. Так гласит дворовая мудрость. Но его и не передашь. Уходит человек, и это уходит вместе с ним. Остаются последователи и ремесло. [3] Надо отдать должное Ньютону, который в отличие от Платона, уничтожавшего физические экземпляры философских идей Демокрита, всемерно способствовал переизданию трудов Декарта (1596–1650). Были опубликованы: “Правила для руководства ума” (изд. 1701), “Трактат о свете” (изд. 1664), “Начала философии” (1644), “Рассуждение о первой философии” (1641), “Геометрия” (1637).

Ну а о том, что еще содержалось в записях, переданных Декартом своим коллегам-корреспондентам, [4] мы, по-видимому, никогда больше не узнаем. [5]

[3]The great skill is impossible to spend on drink. That is a parish wisdom. But nobody can transmit it to anyone else. When he is gone, it is gone with him. The only things the master leaves here to us are his deeds and thoughts in brains of his followers.

[4]Henry Wotton: ’There is no such thing as a good influence, Mr. Gray. All influence is immoral. Immoral from the scientific point of view. The aim of life is selfdevelopment. That is what each of us is here for.’ *The portrait of Dorian Gray*.

[5]Генри Уоттон: “Дипломат – это добропорядочный подданный, отосланный на чужбину дабы лгать на благо государя и вверенного ему Отечества.” История дипломатии, том 1. М: ОГИЗ, 1941.

3.6. Improvements and developments: от Тихо Браге и Декарта через Фарадея и Максвелла в дерби по римановой геометрии. Отправная точка другого научного прорыва в математике и механике характеризуется двумя утверждениями. Первое – было сделано Больцманом об электромагнитной природе происхождения массы электрона. Второе – связано с именем Пуанкаре, подметившему, что вторую группу уравнений Максвелла, выражающую отсутствие магнитных токов и зарядов, можно интерпретировать как коцикл, и указавшему, что эти уравнения выражаются на языке четырех-порожденных метабелевых алгебр Ли, определяемых такими коциклами, а гамильтонов формализм для динамики движения заряженной частицы в электромагнитном поле восстанавливается деформацией [6] универсальной обертывающей после расщепления (см. [3]) метабелевой алгебры Ли по естественной возрастающей фильтрации.

Начало этого этапа завершается с введением электромагнитного потенциала и созданием Миньковским и Пуанкаре основ релятивистской механики, в которой привычные гамильтонианы классического параболического типа заменяются релятивистскими – гиперболическими.

Дальнейшая экспансия этого направления происходила в полном соответствии с тремя принципами успешного менеджмента в науке и образовании.

1. Когда науке не хватает аргументов, она расширяет свой словарь.
2. Уродливые факты убивают красивые гипотезы.
3. Всему свое время.

3.7. Jackpot. В частности, остался невостребованным формализм Германа Вейля, предложившего использовать соотношения Капелли не только для сепарирования различных классов траекторий (см. п.п. 2.5.1, 2.5.2 и 2.8.1, 2.8.2), но и для отыскания разумных типов гамильтонианов в безбрежном океане разрабатываемых теорий.

Следуя за ним (см. [1]), мы оставим “горный массив топологии” и дебри римановой геометрии вместе теориями струн, суперструн, космогоний и вернемся с небес (см. пионерскую работу Т. Калуци [4]) на землю к нашим героиням-студенткам. (Кстати о помеле. Судьбы обеих в дальнейшем сложились вполне благополучно. Первая из них защитила диссертацию по серии работ о волчке (см. [5]). Второй – мы обязаны альтернативной (более, чем простой) квантово-механической моделью энергетических уровней атома водорода (см. [6], [7]).)

3.8. Va-bank: the differential-combinatorical glamour of an affine algebraic quadratic curve. Из теоремы Н. Никчемного (см. п.п. 3.3.5) следует, что для любых разумных решений $x(t), y(t)$ уравнений п.п. 2.8.2, задающих квадратичный хаос Тихо Браге, должно выполняться равенство

$$det\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) & \Delta'(t) \\ x''(t) & y''(t) & \Delta''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & \Delta'''(t) \end{pmatrix} = 0, \qquad (!!!)$$

где $\Delta(t) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{x'(t)\cdot y''(t)-y'(t)\cdot x''(t)}{x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t)}\right)^{-\frac{1}{3}}$. Из уравнений О. В. Герасимовой (см. п.п. 2.5.2, 2.6, 2.7) следует, что справедливо и обратное утверждение.

3.8.1. Теорема Герасимовой – Никчемного. *Пусть аналитические функции $x(t)$, $y(t)$ таковы, что размерность подпространства $K\cdot x'(t)+K\cdot y'(t)$ больше единицы. Тогда они являются решениями уравнений* п.п. 8.2 *задающих квадратичный хаос Тихо Браге тогда и только тогда, когда для $x(t)$, $y(t)$ выполняются равенства*

$$x(t)\cdot y''(t) - x''(t)\cdot y(t) = 0,$$

$$\left|\left(x'(t), y'(t), \left(\left(\frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{x(t)\cdot y'(t) - y(t)\cdot x'(t)}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)'\right)\right| = 0.$$

---

[6] Именно в этом месте была оставлена широко распахнутой калитка, за которой открывался путь к новой, существенно некоммутативной, теории – квантовой механике, в которой классические параболические гамильтонианы обрели вторую жизнь. Эта возможность намного опередила свое время, так как содержала соотношения Гейзенберга, как важный, но весьма частный случай в классе метабелевых лиевых алгебр.

(Эта теорема, по-существу, равносильна следующей лемме.)

3.8.2.Лемма о "директрисе" и "фокусе" (О. В. Герасимова). *Для любых действительных чисел $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ каждое бесконечно дифференцируемое решение $x(t)$, $y(t)$ ($x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t) \neq 0$) системы дифференциальных уравнений $(x'', y'') = -\frac{\gamma}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^3} \cdot (x - a, y - b)$ ($a, b \in \mathbf{R}$) лежит на своей кривой второго порядка, для которой "фокус" расположен в точке (a, b), а "директриса" в смысле предложения Т. Браге определяется уравнением $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta = 0$.*

3.8.3.Теорема Ефимовской – Никчемного. *Пусть аналитические функции $x(t)$, $y(t)$ таковы, что размерность подпространства $K \cdot x'(t) + K \cdot y'(t)$ равна двум. Тогда они являются решениями уравнений* п.п. 8.2 *задающих квадратичный хаос Тихо Браге тогда и только тогда, когда для $x(t)$, $y(t)$ выполняются равенства*

$$x(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y(t) = 0$$

,

$$\left| \left(x^2(t), x(t) \cdot y(t), y^2(t), \left(\frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)} \right)^{-\frac{2}{3}} \right) \right| = 0.$$

Отметим в связи с этой теоремой следующее утверждение, которое, по-видимому, было известно задолго до Роберта Гука.

3.8.4.Лемма о крокодиле, подавившемся яблоком. *Для любых действительных чисел γ, α_1, β_1, α_2, β_2 ($\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1 \neq 0$) каждое бесконечно дифференцируемое решение $x(t)$, $y(t)$ ($x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t) \neq 0$) системы дифференциальных уравнений $(x'', y'') = \frac{-\gamma}{\sqrt{(\alpha_1 \cdot x + \beta_1 \cdot y) \cdot (\alpha_2 \cdot x + \beta_2 \cdot y)}^3} \cdot (x, y)$ лежит на своей кривой второго порядка, касающейся обеих прямых: $\alpha_1 \cdot x + \beta_1 \cdot y = 0$, $\alpha_2 \cdot x + \beta_2 \cdot y = 0$.*

3.8.5. Ключевое уравнение центрально-квадратичной динамики. Из любой из теорем 3.8.1, 3.8.3 непосредственно вытекает, что в центральных силовых полях с квадратичной динамикой отношение площадей двух ориентированных треугольников $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (x' \cdot y'' - x'' \cdot y')/(x \cdot y' - x' \cdot y)$. удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$9 \cdot \Delta''' \cdot \Delta^2 - 45 \cdot \Delta'' \cdot \Delta' \cdot \Delta + 40 \cdot (\Delta')^3 + 9 \cdot (\Delta)' \cdot (\Delta)^3 = 0$,
(см. ниже закон квадратично катящихся симплексов).

4. Реставрация: азы алгебраической теории Браге – Декарта – Уоттона. Все пути заканчиваются в одной точке. Название той точки – "Избавление от иллюзий". Стремясь самоутвердиться, каждое новое поколение декларирует, что оно поумнее предыдущих. Для оптимизма есть все основания. За последние четыреста лет в математическом образовании на всех его стадиях исчезло понятие "роллинг". Работая с аффинной картой декартовой проективной плоскости, геометры ввели в употребление *родственный термин* "дезаргова плоскость". Учебники по аналитической геометрии начинаются с формулы расстояния между двумя точками. Мера и промера не считаются более чем-то первичным. Они воспринимаются, как нечто призводное от метрики и прометрики. Вычисляются длины кривых и площади поверхностей, не обращая внимания на то, что в решениях классических задач механики фигурируют отношения моментов, не зависящие от выбора евклидовых метрик и систем аффинных координат. [7] В результате идеи Т. Браге, Р. Декарта, Г. Уоттона, преломившись в законах Кеплера, получили воплощение в законе всемирного тяготения, который с математической точки зрения не имел такого запаса общности, как разрабатываемые ими модели. И этот процесс построения новых метрических версий теории поля остановить уже нельзя. So it goes, one shoud say. Так что вперед. Вперед в будущее!

4.1. "Тайны" центрально-квадратичной динамики.

4.2. Проинтегралы: тензор Декарта – Гука.

4.3. Центральные расширения локализаций дифференциальных алгебр B_2, D_2. Рассмотрим самые примитивные способы игнорирования закона квадратично катящихся симплексов за счет увеличения размерности фазового пространства.

[7] Веками игнорируется тот (*лежащий на поверхности!*) факт, что в центральных полях трехмерного аффинного пространства, динамика которых квадратична, само движение реализует **закон катящихся симплексов.**

Bibliography

1. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.; English translation of Weyl, H., The Classical Groups: Their Invariants and Representations

2. *Razmyslov Yu.P.* Rolling and Commensurability of Simplexes. // Vestn. Mosk. Un. Math. Mech. 2011. N. 5. 55 –58.

3. *Gerasimova O.V., Razmyslov Yu.P.* Rolling Simplexes and their Commensurability. // Amer. Math.Sco.

4. *Kaluza Th.* Zum Unitatsproflem der Fhysik. // Berl. Berichte 1921, 966.

5. *Efimovskaya O.V.* Algebraic Aspects of the Theory of Integrable Tops // thesis of candidate of physic-mathematic sciences : 01.01.06.- Moscow, 2005.- 118 pp.: il. RGB OD, 61 06-1/114

6. *Gerasimova O.V.* The spectra of commutator Hamiltonians are akin to the energy levels of the hydrogen atom. // Uspekh. mat. nauk 2009 N4.

7. *Gerasimova O.V.* The spectra of commutator Hamiltonians are akin to the energy levels of the hydrogen atom. // Vestn. Mosk. Un. Math. Mech. 2008 N6.