СЕРАЯ МАГИЯ СООТНОШЕНИЙ КАПЕЛЛИ НА КВАДРАТИЧНЫХ КРИВЫХ

(О дифференциально-алгебраических истоках солипсизма Джорджа Беркли *))

Gold Fish, Master Key

Аннотация. В данной статье обсуждается дифференциально-алгебраическая w-свободная хрономодель Декарта-Гука

$$\left(\frac{x}{y}\right)''' = \frac{3}{2}\cdot\frac{\left((xy'-x'y)^2/(x^2+y^2)\right)'}{(xy'-x'y)^2/(x^2+y^2)}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'' - w\cdot\left(\frac{x}{y}\right)' \quad {}^{**)} \qquad (1)$$

"солнечной системы" Птолемея-Коперника.

Ключевые слова: картезианский гамбит, тёмные массы, призраки истин; картезианские q-псевдометрики, квазиптолемеевы (q,ℓ)-псевдометрики, хронофристайл; дифференциальные алгебры, аналитический спектр, соотношения Капелли-Вронского, воронки Декарта, квадратичный эфир, ферматистские и кеплеровы параметризации плоских кривых.

„В моей модели Вселенной
нет места для бога."
Лаплас

1. Введение. Сразу возьмём (см. уравнения (1)) быка за рога: нырнём в омут декартова квадратичного эфира, задаваемого двумя дифференциальными переменными x, y, связанными одним дифференциальным соотношением Капелли $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$.

Начнём с вычисления определителя Вронского $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$ в свободной дифференциальной K-алгебре

$$F_2 \stackrel{\text{def}}{=} K[x, y, x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots, x^{(i)}, y^{(i)} \mid i = 0,1,2,\ldots] \quad \left((x^{(i)})' \stackrel{\text{def}}{=} x^{(i+1)},\ (y^{(i)})' \stackrel{\text{def}}{=} y^{(i+1)}\right).$$

Ответ был указан в работе [1]. Читатель может проверить его посредством символьных компьютерных вычислений. Однако, старый добрый рутинный способ имеет свои преимущества, так как позволяет выбирать, контролировать, оптимизировать, узаконить, формализовать, канонизировать конкретный путь (алгоритм) проведения вычислений и получать результат в наиболее наглядно-приемлемой для интерпретации форме.

1.1. Первый призрак второго закона: $\left(\frac{x}{y}\right)''' = \nu_1\left(\frac{x}{y}\right)'' - \nu_2\left(\frac{x}{y}\right)'$.

---

*) "Об истории ума публикаций издаётся тьма, в них господствовать должна философия одна: объясняет суть она эволюцией говна в поле тяжести ядра. (В головах - застой и мгла, вместо света - звон бабла, а в масштабах всей Земли: психология войны, экономика тюрьмы и политика сумы.)"

**) "Вихри декартовы веют над нами, высшие силы в воронках живут, тёмные массы, сказовившись полями, в волнах эфира планеты ведут...
(Там серая мгла прирастает мозгами, где в омутах тихих кувшинки цветут и наравне выживают с чертями призраки истин, которых не ждут...)" (Д.Е.ЖАВЮ)

1.1. Первый призрак второго закона: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}''' = \nu_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'' - \nu_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'$. Так как в двумерном (линейном) пространстве любые три вектора линейно зависимы, то между векторами (x''', y'''), (x'', y''), (x', y') должна быть линейная зависимость над полем частных $Q(F_2)$. Here you are

$$\sigma_{12}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}''' = \sigma_{12}'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'' - \sigma_{23}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' \qquad \left(\sigma_{12} \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix},\ \sigma_{23} \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix}x'' & y''\\ x''' & y'''\end{vmatrix}\right)$$

и мы получаем в локализации $F_2[\sigma_{12}^{-1}]$ следующее векторное соотношение

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}''' = \nu_1\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'' - \nu_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' \qquad \left(\nu_1 \overset{\text{def}}{=} \sigma_{12}'/\sigma_{12},\ \nu_2 \overset{\text{def}}{=} \sigma_{23}/\sigma_{12}\right). \qquad (2)$$

Воспользуемся им при вычислении определителя $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$. Прибавляя к его четвертой строке вторую и третью, умноженные на ν_2 и $-\nu_1$, соответственно, получаем нули в четвёртом, пятом и шестом столбцах, что доказывает следующее утверждение

Лемма 1. В локализации $F_2[\sigma_{12}^{-1}]$ имеет место равенство

$$|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = -\sigma_{12}\cdot\left|6x''x' - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}x'^2,\ 3(x''y' + x'y'') - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}x'y',\ 6y''y' - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}\cdot y'^2\right|,$$

а в кубическом расширении $F_2[\sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$ этой локализации

$$|\sigma_{12}^{2/3}, x'^2, x'y', y'^2| = (\sigma_{12}^{2/3})^4\,|1, x'^2/\sigma_{12}^{2/3}, x'y'/\sigma_{12}^{2/3}, y'^2/\sigma_{12}^{2/3}| =$$

$$(\sigma_{12}^{2/3})^4\cdot|(x'^2/\sigma_{12}^{2/3})', (x'y'/\sigma_{12}^{2/3})', (y'^2/\sigma_{12}^{2/3})'| = \sigma_{12}^{2/3}\left|(x'^2)' - \frac{2}{3}\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}x'^2, (x'y')' - \frac{2}{3}\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}(x'y'), (y'^2)' - \frac{2}{3}\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}y'^2\right| =$$

$$= \frac{\sigma^{-2/3}}{3^3}\cdot\left|6x''x' - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}\cdot x'^2,\ 3(x''y' + x'y'') - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}x'y',\ 6y''y' - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}y'^2\right| = -\frac{\sigma_{12}^{-1/3}}{3^3}|x^2, xy, y^2, x, y, 1|,$$

в частности соотношения Капелли

$$|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0,\ |\sigma_{12}^{2/3}, x'^2, x'y', y'^2| = 0,\ \left|6x''x' - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}x'^2, 3(x''y' + x'y'') - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}x'y', 6y''y' - 2\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}y'^2\right| = 0$$

равносильны в $F_2[\sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$.

Следствие 1. В $F_2[\sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$ выполняются равенства $|x'^2, x'y', y'^2| = 2\sigma_{12}^3$,

$$|\sigma_{12}^3, x'^2, x'y', y'^2| = -|x'^2, x'y', y'^2|\cdot\sigma_{12}^{2/3}\left(\frac{2}{3}\nu_1'' - \frac{12}{9}\nu_1'\nu_1 + \frac{8}{27}\nu_1^3 - \frac{4}{3}\nu_1\nu_2 + 2\nu_2'\right).$$

Доказательство. Для $z = \alpha x + \beta y$ $(\alpha, \beta \in K)$ из соотношений (2) вытекает, что

$(z'^2)' = 2z'z''$, $(z'^2)'' = 2(z'')^2 + 2\nu_1 z'z'' - 2\nu_2 z'^2$

$(z'^2)''' = 6\nu_1(z'')^2 + (-8\nu_2 + 2\nu_1' + 2\nu_1^2)z''z' - 2z'^2(\nu_2' + \nu_1\nu_2)$.

Следовательно, $(z'^2)''' = 3\nu_1(z'^2)'' + (\nu_1' - 4\nu_2 - 2\nu_1^2)(z'^2)' + (4\nu_1\nu_2 - 2\nu_2')z'^2$. Поэтому вычитая в определителе $|\sigma_{12}^{2/3}, x'^2, \frac{1}{2}(x'+y')^2, y'^2|$ из четвёртой строки первую, вторую и третью строки, умноженные на $4\nu_1\nu_2 - 2\nu_2'$, $\nu_1' - 4\nu_2 - 2\nu_1^2$, $3\nu_1$, соответственно, получаем нули в четвёртой строке на втором, третьем и четвертом месте. Непосредственный подсчёт первого элемента в этой строке завершает доказательство утверждения.

Следствие 2. В дифференциальной K-алгебре $F_2[\sigma_{12}^{-1}]$ соотношение

$$9\nu_1'' - 18\nu_1'\nu_1 + 4\nu_1^3 - 18\nu_1\nu_2 + 27\nu_2' = 0 \qquad (3)$$

равносильно соотношению Капелли $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$.

Замечание 1. Отметим, что проведённые выше незамысловатые комбинаторные рассуждения справедливы для поля K произвольной характеристики. Но интретация полученных результатов наиболее важна в случаях $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Прикладной аспект использования соотношений Капелли для дифференциальных уравнений достаточно полно изложен в работе [2] и диссертации [3]. На данный момент мы ограничимся утверждением: если для плоской аналитической кривой $x(z), y(z)$ её мероморфные частотные характеристики $\nu_1(z), \nu_2(z)$ связаны законом (3), то $x(z), y(z)$ лежит на некоторой нераспадающейся кривой второго порядка (если же $\sigma_{12}(x(z), y(z)) \equiv 0$, то $x(z), y(z)$ лежит на прямой).

1.2. Квадратичный декартов эфир и его обитатели.*) Пусть F_2, как и прежде обозначает свободную дифференциальную K-алгебру с двумя свободными образующими x,y. Положим $W_2 \stackrel{def}{=} F_2/\{|x^2,xy,y^2,x,y,1|\}$, где $\{|x^2,xy,y^2,x,y,1|\}$ – дифференциальный идеал, порождённый соответствующим определителем Вронского. Тогда локализация $W_2[\sigma_{12}^{-1}]$ алгебры W_2 по элементу σ_{12} является факторизацией $F_2[\sigma_{12}^{-1}]$ по дифференциальному идеалу, порождённому элементом, стоящему в левой части равенства (3). Пусть

$$g_{11} \stackrel{def}{=} |xy, y^2, x, y, 1|, \quad g_{12} \stackrel{def}{=} -\tfrac{1}{2}|x^2, y^2, x, y, 1|, \quad g_{22} \stackrel{def}{=} |x^2, xy, x, y, 1|;$$
$$g_{13} = g_{31} \stackrel{def}{=} -\tfrac{1}{2}|x^2, xy, y^2, y, 1|, \quad g_{23} = g_{32} \stackrel{def}{=} \tfrac{1}{2}|x^2, xy, y^2, x, 1|;$$
$$g_{33} \stackrel{def}{=} -|x^2, xy, y^2, x, y|.$$

Предложение 1. В K-алгебре F_2 выполняются следующие равенства

$$g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2 + 2g_{31}x + 2g_{32}y + g_{33} = 0, \tag{4}$$
$$g_{31}x + g_{32}y + g_{33} = -2\cdot 9\cdot \sigma_{01}\cdot \sigma_{12}^3 \quad \left(\sigma_{01} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right), \tag{5}$$
$$g_{11}x'^2 + 2g_{12}x'y' + g_{22}y'^2 = 2\cdot 9\cdot \sigma_{12}^4, \tag{6}$$
$$2(g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2) + (2g_{31}x + 2g_{32}) = 2\cdot 2\cdot 9\cdot \sigma_{01}\sigma_{12}^3. \tag{7}$$

Предложение 2 (Герасимова). В F_2 имеют место соотношения

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = -2^3\cdot 9^3\cdot \sigma_{12}^{10}, \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = 2^2\cdot 9^2\cdot \sigma_{12}^4\left(3\sigma_{12}''\sigma_{12} - 5(\sigma_{12}')^2 + 9\sigma_{12}\cdot\sigma_{23}\right) =$$
$$= 2^2\cdot 9^2\cdot \sigma_{12}^6\left(3(\sigma_{12}'/\sigma_{12})' - 2(\sigma_{12}'/\sigma_{12})^2 + 9\cdot(\sigma_{23}/\sigma_{12})\right). \tag{9}$$

Доказательство. Символьная компьютерная проверка.

В работе [2] доказано, что из соотношения Капелли $|a_1, a_2, \ldots, a_n| = 0$ вытекают равенства $\Delta_i\Delta_j' - \Delta_i'\Delta_j = 0$, где $\Delta_k \stackrel{def}{=} |a_1, \ldots, \hat{a}_k, \ldots, a_n|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Непосредственная проверка показывает, что из соотношений $|a_i, b_i| = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ следует равенство $|a_1 a_2 \cdot\ldots\cdot a_m, b_1 b_2 \cdot\ldots\cdot b_m| = 0$. Поэтому справедливо следующее

Предложение 3. В дифференциальной K-алгебре W_2 выполняются равенства

$$|g_{ij}, g_{kl}| \stackrel{def}{=} g_{ij}\cdot g_{kl}' - g_{ij}'\cdot g_{kl} = 0 \quad (i,j,k,l = 1,2,3), \tag{10}$$
$$|g_{ij}\cdot g_{kl}\cdot g_{st},\ g_{pq}\cdot g_{rt}\cdot g_{uv}| = 0, \tag{11}$$
$$\left|\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}^3, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}^2\right| = 0 = \left|\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}^3, \sigma_{12}^{20}\right|. \tag{12}$$

Следствие 3. В K-алгебре $W_2[\sigma_{12}^{-1}]$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}' = \frac{10}{3}\cdot\frac{\sigma_{12}'}{\sigma_{12}}\cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$(\nabla^3/\Delta^2)' = 0 \quad \left(\nabla \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},\ \Delta \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}\right). \tag{14}$$

Замечание 2. Равенства (14), (9), (8) позволяют „проинтегрировать"

$$\theta\cdot\sigma_{12}^2 = (3\nu_1' - 2\nu_1^2 + 9\nu_2)^3 \quad (\theta \stackrel{def}{=} \nabla^3/\Delta^2,\ \nu_1 = \sigma_{12}'/\sigma_{12},\ \nu_2 = \sigma_{23}/\sigma_{12}) \tag{15}$$

„дифференциальное уравнение" (3), переписав его в виде

$$2\nu_1(3\nu_1' - 2\nu_1^2 + 9\nu_2) = 3(3\nu_1' - 2\nu_1^2 + 9\nu_2)'. \tag{3'}$$

Что же касается загадочной дифференциальной константы θ, то на данный момент достаточно знать, что если (4) задает уравнение эллипса на действительной плоскости Oxy, то $\pi^2\cdot\Delta^2/\nabla^3$ – это его квадрат площади (см. работу [4]).

*) „Мой давний друг, Рене Декарт, – любитель женских форм и карт, философ, дуалист, фанат (гвардеец, ренегат, солдат) во всём искал по жизни фарт. Он – забияка и бреттер – сразил немало мушкетёр, и сам Великий кардинал награду лично нам вручал. И вот ему в конце пути, когда не может невезти, сказать последнее: „Прости" – явился дьявол во плоти, чтоб его с ангелом свести..."

Зададим картезианский стандарт (тензор Декарта-Гука), полагая (См. п. 1.2)

$$(H)=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \stackrel{\text{det}}{=} -\frac{1}{18}\cdot\frac{d}{\sigma_{01}\sigma_{12}^3}\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Следствие 4. В дифференциальной K-алгебре $\mathcal{Y}[\sigma_{12}^{-1}]$ выполняются равенства

$$h_{11}x^2+2h_{12}xy+h_{22}y^2+2h_{31}x+2h_{32}y+h_{33}=0, \tag{24}$$

$$h_{31}x+h_{32}y+h_{33}=d, \tag{25}$$

$$h_{11}x'^2+h_{12}x'y'+h_{22}y'^2=\frac{\sigma_{01}^2}{d^2}\cdot\det(H), \tag{26}$$

$$\sigma_{12}=\frac{\sigma_{01}^3}{d^3}\cdot\det(H), \tag{27}$$

$$(h_{ij})'=0 \quad (i,j=1,2,3). \tag{28}$$

Доказательство. Соотношения (24), (25), (26), (27) равносильны (4), (5), (6), (8), "соответственно". Из (21), (13) последовательно получаем $\sigma_{12}'/\sigma_{12}=3\cdot(\sigma_{01}'/\sigma_{01}-d'/d)$,

$$h_{ij}'/h_{ij}=d'/d-\sigma_{01}'/\sigma_{01}-3\sigma_{12}'/\sigma_{12}+g_{ij}'/g_{ij}=10\cdot(d'/d-\sigma_{01}'/\sigma_{01})+\frac{10}{3}\cdot\sigma_{12}'/\sigma_{12}=0,$$

т.е. $h_{ij}'=0$. Следствие доказано.

Теорема о директрисе (О.В. Герасимова). Если для плоской аналитической кривой $x(z), y(z)$ выполняются равенства

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}'''=3\cdot\left(\sigma_{01}'/\sigma_{01}-\frac{\alpha x'(z)+\beta y'(z)}{\alpha x+\beta y+\delta}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}''-w\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' \quad (\alpha,\beta,\delta\in K=R,C),$$

то эта кривая лежит на некоторой квадратичной кривой вида $h_{11}x^2+2h_{12}xy+h_{22}y^2+2\alpha x+2\beta y+\delta=0$.

Доказательство. Невооружённым глазом видно, что если в уравнения (21) подставить $d=\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta$, то третье уравнение будет следствием первых двух, а в тензоре (H) элементы $h_{31}=h_{13}$, $h_{32}=h_{23}$, h_{33} совпадают с α, β, δ, соответственно. Утверждение теоремы полностью доказано. (См. также [3], лемма о директрисе и фокусе.)

Предложение 4. Если аналитические (действительные) функции $x(t), y(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}'''=\frac{3}{2}\,\frac{\left((xy'-x'y)/(x^2+y^2)\right)'}{(xy'-x'y)/(x^2+y^2)}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}''-w\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}',\ ^{*)}$$

то плоская кривая $(x(t),y(t))$ лежит на квадратичной кривой с фокусом в начале координат.

Доказательство. We leave it as an **exercise** for the reader.

Замечание 4. Укажем как соотносятся между собой дифференциальные K-алгебры $\mathcal{B}$ и $\mathcal{Y}$.

*) Сравни с уравнениями (1).

1.3. Второй призрак второго закона: $\binom{x}{y}'' = w_1 \cdot \binom{x}{y}' - w_2 \cdot \binom{x}{y}$. Так как в двумерном линейном пространстве любые три вектора линейно зависимы, то между векторами (x'', y''), (x', y'), (x, y) должна быть линейная зависимость над полем частных $Q(F_2)$. Here you are

$$\sigma_{01} \cdot \binom{x}{y}'' = \sigma_{01}' \cdot \binom{x}{y}' - \sigma_{12} \cdot \binom{x}{y} \qquad \left(\sigma_{01} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix},\ \sigma_{12} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right)$$

и мы получаем в локализации $F_2[\sigma_{01}^{-1}]$ следующее векторное соотношение

$$\binom{x}{y}'' = w_1 \cdot \binom{x}{y}' - w_2 \cdot \binom{x}{y} \qquad \left(w_1 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \sigma_{01}' / \sigma_{01},\ w_2 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \sigma_{12} / \sigma_{01} \right)^{4)} \qquad (16)$$

Воспользуемся им при вычислении определителя $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$. Так же, как и при доказательстве следствия 1, для $z = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ $(\alpha, \beta \in K)$ из соотношения (16) вытекает, что

$$(z^2)' = 2 \cdot z \cdot z',\ (z^2)'' = 2(z')^2 + 2 \cdot w_1 \cdot z z' - 2 \cdot w_2 \cdot z^2,$$

$$(z^2)''' = 6 \cdot w_1 \cdot (z')^2 + (-8 w_2 + 2 w_1 + 2 w_1^2) \cdot z z' - 2 z^2 (w_2' + w_1 \cdot w_2).$$

Следовательно, $(z^2)''' = 3 \cdot w_1 \cdot (z^2)'' + (w_1' - 4 w_2 - 2 w_1^2) \cdot (z^2)' + (4 w_1 w_2 - 2 w_2') \cdot z^2$. Поэтому, вычитая в определителе $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$ из четвёртой строки первую, вторую и третью строки, умноженные на $4 w_1 \cdot w_2 - 2 w_2'$, $w_1' - 4 w_2 - 2 w_1^2$, $3 w_1$, соответственно, получаем нули в четвёртой строке на первом, втором и третьем месте, что доказывает следующее утверждение.

Лемма 2. В локализации $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}]$ имеют место равенства

$$|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 2 \cdot \sigma_{01}^3 \cdot |3 w_2 \cdot x' + (w_2' - 2 w_1 \cdot w_2) x,\ 3 w_2 \cdot y' + (w_2' - 2 w_1 \cdot w_2) y,\ 2(w_2' - 2 w_1 \cdot w_2)| =$$

$$= 2 \cdot \sigma_{01}^3 \cdot (3 w_2)^3 \cdot 2 \cdot |x' + x \cdot (\tfrac{1}{3} \sigma_{12}' / \sigma_{12} - \sigma_{01}' / \sigma_{01}),\ y' + y(\tfrac{1}{3} \sigma_{12}' / \sigma_{12} - \sigma_{01}' / \sigma_{01}),\ \tfrac{1}{3} \sigma_{12}' / \sigma_{12} - \sigma_{01}' / \sigma_{01}|,$$

а в кубическом расширении $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$ справедливы соотношения

$$|\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}, x, y, 1| = (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})^4 \cdot |1, x / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}), y / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}), 1 / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})| =$$

$$(\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})^4 \cdot |(x / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}))', (y / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}))', (1 / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}))'| =$$

$$(\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}) \cdot |x' - x \cdot (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})' / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}),\ y' - y \cdot (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})' / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}),\ -(\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})' / (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})| =$$

$$(\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}) \cdot |x' - x(\tfrac{1}{3} \sigma_{12}' / \sigma_{12} - \sigma_{01}' / \sigma_{01}),\ y' - y(\tfrac{1}{3} \sigma_{12}' / \sigma_{12} - \sigma_{01}' / \sigma_{01}),\ \tfrac{1}{3} \sigma_{12}' / \sigma_{12} - \sigma_{01}' / \sigma_{01}|.$$

В частности, соотношения Капелли

$$|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0,\ |\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}, x, y, 1| = 0,\ |x' + x(\tfrac{1}{3} \nu_1 - w_1),\ y' + y(\tfrac{1}{3} \nu_1 - w_1),\ \tfrac{1}{3} \nu_1 - w_1| = 0$$

равносильны в $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$.

Следствие 3. В дифференциальной K-алгебре $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$ дифференциальные соотношения

$$(\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})''' = \nu_1 \cdot (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})'' - \nu_2 \cdot (\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})' \qquad (18)$$

$$|(\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3}), x, y, 1| = 0 \qquad (19)$$

равносильны.

Доказательство. Прибавляя к четвёртой строке определителя $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$ вторую и третью, умноженные на ν_2 и $-\nu_1$, соответственно, получаем из равенства (2), что из соотношения (18) следует (17).

Из равенств (2), (17) вытекает соотношение $|(\sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3})', x', y'| = 0$, которое равносильно (18), что завершает доказательство следствия 3.

Замечание 3. Вот так (потихонечку, полегонечку, весьма ненавязчиво) в "свободной" дифференциальной K-алгебре $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$ затянуло нас, засосало, в нежданно-негаданно разверзнувшуюся бездну (уравнений)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3} \end{pmatrix}''' = \nu_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3} \end{pmatrix}'' - \nu_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sigma_{01} / \sigma_{12}^{1/3} \end{pmatrix}' \qquad (20)$$

мефисто-пучины квадратичной динамики. (Диалектика, однако...)

1.4. Хронофристайл: Эйч Дабл Ю-формализм Декарта-Гука (теорема о директрисе). Предыдущие вычисления, соотношения (2) и (3), а также их модификации (20) вынуждают нас при выработке "естественных" моделей динамики на квадратичных кривых ступить на твердую почву дифференциальной алгебры. В данный момент мы уже можем зафиксировать три точки зрения (на квадратичный эфир).

Уоттовская версия. Дифференциальная K-алгебра W задаётся двумя дифференциальными порождающими x, y и одним дифференциальным соотношением Капели $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$.

Никчёмная версия. Дифференциальная K-алгебра B определяется четырьмя дифференциальными образующими x, y, ν_1, ν_2 и определяющими соотношениями (2), (3):
$(x, y)''' = \nu_1 (x, y)'' - \nu_2 (x, y)'$, $9\nu_1'' = 18\nu_1\nu_1' - 4\nu_1^3 + 18\nu_1\nu_2 - 27\nu_2'$ (уравнения Н. Никчемного).*)

Картезианская версия. Зададим дифференциальную K-алгебру $\mathcal{Y}$ в локализации $F_4[\sigma_{01}^{-1}, d^{-1}]$ свободной дифференциальной K-алгебры F_4 с четырьмя свободными порождающими x, y, d, w тремя дифференциальными соотношениями (Декарта-Гука):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ d \end{pmatrix}''' = 3 \cdot \frac{(\sigma_{01}/d)'}{\sigma_{01}/d} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ d \end{pmatrix}'' - w \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ d \end{pmatrix}' \qquad \left(\frac{(\sigma_{01}/d)'}{\sigma_{01}/d} = \frac{\sigma_{01}'}{\sigma_{01}} - \frac{d'}{d} \right). \qquad (21)$$

Определение K-алгебры $\mathcal{Y}$ подразумевает (см. (21)), что $\mathcal{Y}$ может быть реализована, как дифференциальная K-подалгебра, в поле рациональных функций $K(x'', y'', d'', x', y', d', x, y, d, w, \ldots, w^{(q)}, \ldots)$, на которое дифференцирование $'$ продолжается в соответствии с соотношениями (21). Следовательно, $\mathcal{Y}$ - область целостности, а её поле частных $Q(\mathcal{Y})$ является полем рациональных функций. Обозначим $Q(\mathcal{Y})[\sigma_{12}^{1/3}]$ дифференциальное поле, получающееся присоединением к $Q(\mathcal{Y})$ корня кубического из σ_{12} ($(\sigma_{12}^{1/3})' \stackrel{def}{=} (\sigma_{12}'/\sigma_{12}) \cdot \sigma_{12}^{1/3}$). Положим $\eta \stackrel{def}{=} \sigma_{12}^{1/3} \cdot d/\sigma_{01}$. Применяя соотношения (21) для исключения во встречающихся выражениях x''', y''', d''', последовательно получаем, что
$\sigma_{12}'/\sigma_{12} = 3(\sigma_{01}'/\sigma_{01} - d'/d)$, $\sigma_{23}/\sigma_{12} = w$, $\eta'/\eta = \frac{1}{3}\sigma_{12}'/\sigma_{12} + d'/d - \sigma_{01}'/\sigma_{01} = 0$,
т.е.

$$\eta' = 0, \quad d = \eta \cdot \sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3} \qquad (22)$$

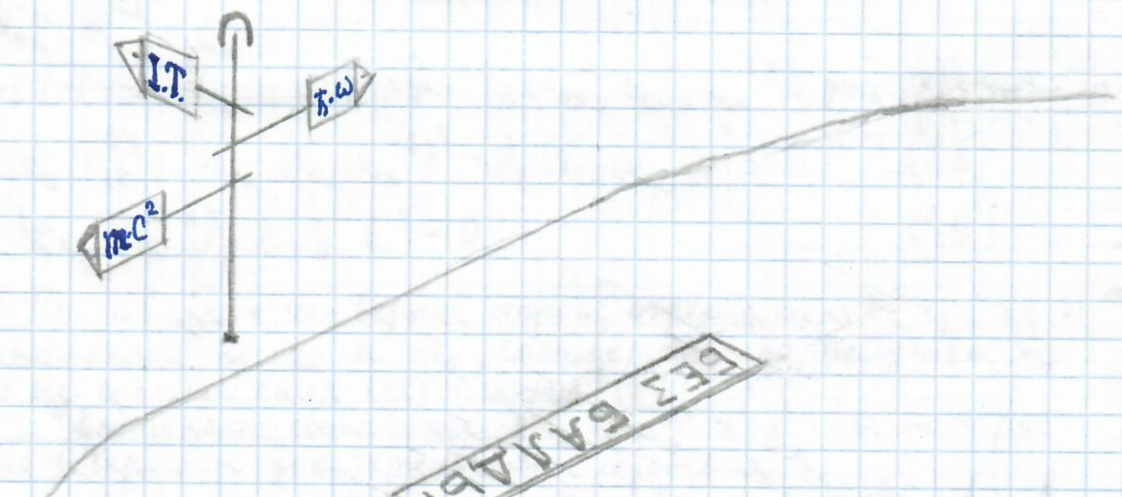
Лемма 3. В дифференциальной K-алгебре $\mathcal{Y}$ выполняется соотношение $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$.

Доказательство. Подставляя $d = \eta \cdot \sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}$ в (21), с учётом (22) и того, что $w = \sigma_{23}/\sigma_{12}$, получаем соотношение (17) (а также (18)) и утверждение леммы вытекает из следствия 3 (а также замечания 3).

"What does it mean?" –

OLD
HARRY:

„Чтобы
это
значило?"



*) Невооружённым глазом видно (см. (2), (3)), что $B = K[x'', y'', x', y', \nu_1', x, y, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_2^{(q)}, \ldots]$ - область целостности, на которой дифференцирование $'$ действует естественным образом $(w^{(q)})' = w^{(q+1)}$, а $(x'', y'')'$, $(\nu_1')'$ определяется в соответствии с (2) и (3). Вычисления п. 1.1 показывают, что
а) в дифференциальной подалгебре $\overline{W}$, порождённой x, y в B, выполняется соотн. $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$,
б) естественный гомоморфизм $\varphi: W \to \overline{W}$ продолжается до эпиморфизма $\hat{\varphi}: W[\sigma_{12}^{-1}] \to B[\sigma_{12}^{-1}]$,
в) естественный гомоморфизм $\psi: B \to W[\sigma_{12}^{-1}]$ продолжается до эпиморфизма $\hat{\psi}: B[\sigma_{12}^{-1}] \to W[\sigma_{12}^{-1}]$,
г) $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$ - тождественное отображение на $B[\sigma_{12}^{-1}]$, т.е. дифференциальная K-алгебра $W[\sigma_{12}^{-1}]$ изоморфна $B[\sigma_{12}^{-1}]$ и, следовательно $W[\sigma_{12}^{-1}]$ - область целостности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Razmyslov Yu. P. An explanation (field equations in accordance with Tycho Brake). // Journal of Mathematical Sciences. 2013, v. 191, №5, 726-742.

[2]. Герасимов О.В., Погудин Г.А., Размыслов Ю.П. Rolling simplexes and their commensurability, III (соотношения Капелли и их применение в дифференциальных алгебрах // Фундаментальная и прикладная математика, том 19, выпуск 6, 2014, стр. 7-24.

[3]. Герасимова О.В. Дифференциально-алгебраические и геометрические основы центрально-квадратичной динамики на кривых второго порядка // канд дис. М, 2014

[4]. Of the importance of keeping the gravity
отчёт на Истине за 2018 год, опубликован под названиями „О важности притяжения" и „The gravity first" в 2019 году, №4.

FINAL CAPTION

TOTAL RECALL (mathematicians only)

Почему, мой друг, не сжечь
Труд Декарта, сунув в печь?
А поверх, причём здесь честь,
Портрет Гука мог бы лечь...

Чтоб с высот гигантов плеч
Сквозь лорнет в эфир глядеть,
Волн пигмея не узреть...

Ересь прочую пресечь,
Свод законов уберечь
От никчёмных с Брахе встреч...

Примирись и не перечь!
Их проект не стоит свеч,
Наш - внедряет "массу" вречь...

One

Чтоб коперников увлечь
Мысль научную стеречь,
От прозрения отвлечь;

Two

Перебежчиков презреть:
В технологии вовлечь,
По шарашкам запереть,
В педагогику привлечь;

Three

Болтунам-хвала и честь:
Их на кафедры упечь
(На риторику налечь -
Попугаев там не счесть);

Four

Силу мысли одолеть, /* cogito ergo sum */
Дух сомнения стереть, /* de omnibus dubitandum */
За Кавендишем смотреть,
Вместе с Гюйгенсом пригреть...

CLOSING WORDS

Ренегат покинул свет,
Канул в лету душевед,
/* Спит, прозрев, апологет, */
Майкельсона больше нет...

Но, спустя миллионы лет,
Сквозь эфир доходит цвет
Всех исчезнувших планет,
Положивших на проект...