1.3. Второй призрак второго закона: $\binom{x}{y}'' = w_1 \cdot \binom{x}{y}' - w_2 \cdot \binom{x}{y}$. Так как в двумерном линейном пространстве любые три вектора линейно зависимы, то между векторами (x'', y''), (x', y'), (x, y) должна быть линейная зависимость над полем частных $Q(F_2)$. Here you are

$$\sigma_{01} \cdot \binom{x}{y}'' = \sigma_{01}' \cdot \binom{x}{y}' - \sigma_{12} \cdot \binom{x}{y} \qquad \left(\sigma_{01} \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix},\ \sigma_{12} \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\right) \tag{15}$$

и мы получаем в локализации $F_2[\sigma_{01}^{-1}]$ следующее векторное соотношение

$$\binom{x}{y}'' = w_1 \cdot \binom{x}{y}' - w_2 \cdot \binom{x}{y} \qquad \left(w_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \sigma_{01}'/\sigma_{01},\ w_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \sigma_{12}/\sigma_{01}\right)^{4)} \tag{16}$$

Воспользуемся им при вычислении определителя $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$. Так же, как и при доказательстве следствия 1, для $z = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ $(\alpha, \beta \in K)$ из соотношения (16) вытекает, что

$$(z^2)' = 2 \cdot z \cdot z',\quad (z^2)'' = 2(z')^2 + 2 \cdot w_1 \cdot z z' - 2 \cdot w_2 \cdot z^2,$$

$$(z^2)''' = 6 \cdot w_1 \cdot (z')^2 + (-8w_2 + 2w_1 + 2w_1^2) \cdot z z' - 2z^2(w_2' + w_1 \cdot w_2).$$

Следовательно, $(z^2)''' = 3 \cdot w_1 \cdot (z^2)'' + (w_1' - 4w_2 - 2w_1^2) \cdot (z^2)' + (4w_1 w_2 - 2w_2') \cdot z^2$. Поэтому, вычитая в определителе $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$ из четвёртой строки первую, вторую и третью строки, умноженные на $4w_1 \cdot w_2 - 2w_2'$, $w_1' - 4w_2 - 2w_1^2$, $3w_1$, соответственно, получаем нули в четвёртой строке на первом, втором и третьем месте, что доказывает следующее утверждение.

Лемма 2. В локализации $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}]$ имеют место равенства

$$|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 2 \cdot \sigma_{01}^3 \cdot |3w_2 \cdot x' + (w_2' - 2w_1 \cdot w_2)x,\ 3w_2 \cdot y' + (w_2' - 2w_1 \cdot w_2)y,\ 2(w_2' - 2w_1 \cdot w_2)| =$$

$$= 2 \cdot \sigma_{01}^3 \cdot (3w_2)^3 \cdot 2 \cdot |x' + x \cdot (\tfrac{1}{3}\sigma_{12}'/\sigma_{12} - \sigma_{01}'/\sigma_{01}),\ y' + y(\tfrac{1}{3}\sigma_{12}'/\sigma_{12} - \sigma_{01}'/\sigma_{01}),\ \tfrac{1}{3}\sigma_{12}'/\sigma_{12} - \sigma_{01}'/\sigma_{01}|,$$

а в кубическом расширении $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$ справедливы соотношения

$$|\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}, x, y, 1| = (\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})^4 \cdot |1, x/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}), y/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}), 1/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})| =$$

$$(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})^4 \cdot |(x/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}))', (y/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}))', (1/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}))'| =$$

$$(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}) \cdot |x' - x \cdot (\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})'/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}),\ y' - y \cdot (\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})'/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}),\ -(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})'/(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})| =$$

$$(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}) \cdot |x' - x(\tfrac{1}{3}\sigma_{12}'/\sigma_{12} - \sigma_{01}'/\sigma_{01}),\ y' - y(\tfrac{1}{3}\sigma_{12}'/\sigma_{12} - \sigma_{01}'/\sigma_{01}),\ \tfrac{1}{3}\sigma_{12}'/\sigma_{12} - \sigma_{01}'/\sigma_{01}|.$$

В частности, соотношения Капелли

$$|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0,\quad |\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}, x, y, 1| = 0,\quad |x' + x \cdot (\tfrac{1}{3}v_1 - w_1),\ y' + y(\tfrac{1}{3}v_1 - w_1),\ \tfrac{1}{3}v_1 - w_1| = 0$$

равносильны в $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$.

Следствие 3. В дифференциальной K-алгебре $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$ дифференциальные соотношения

$$(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})''' = v_1 \cdot (\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})'' - v_2 \cdot (\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})' \tag{17}$$

$$|(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}), x, y, 1| = 0 \tag{18}$$

равносильны.

Доказательство. Прибавляя к четвёртой строке определителя $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$ вторую и третью, умноженные на v_2 и $-v_1$, соответственно, получаем из равенства (2), что из соотношения (18) следует (17).

Из равенств (2), (17) вытекает соотношение $|(\sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3})', x', y'| = 0$, которое равносильно (18), что завершает доказательство следствия 3.

Замечание 3. Вот так (потихонечку, полегонечку, весьма неназойливо) в "свободной" дифференциальной K-алгебре $F_2[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, \sigma_{12}^{1/3}]$ затянуло нас, засосало, в нежданно-негаданно разверзнувшуюся бездну (уравнений)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3} \end{pmatrix}''' = v_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3} \end{pmatrix}'' - v_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3} \end{pmatrix}' \tag{19}$$

мефисто-пучины квадратичной динамики. (Диалектика, однако...)

1.4. Хронофристайл: Эйч Дабл Ию-формализм Декарта-Гука (теорема о директрисе). Предыдущие вычисления, соотношения (2) и (3), а также их модификации (19) вынуждают нас при выработке "естественных" моделей динамики на квадратичных кривых ступить на твердую почву дифференциальной алгебры. В данный момент мы уже можем зафиксировать три точки зрения (на квадратичный эфир).

Уоттовская версия. Дифференциальная K-алгебра W задаётся двумя дифференциальными порождающими x, y и одним дифференциальным соотношением Капелли $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$.

Никчёмная версия. Дифференциальная K-алгебра B определяется четырьмя дифференциальными образующими x, y, ν_1, ν_2 и определяющими соотношениями (2), (3):

$$(x,y)''' = \nu_1 (x,y)'' - \nu_2 (x,y)', \quad 9\nu_1'' = 18\nu_1\nu_1' - 4\nu_1^3 + 18\nu_1\nu_2 - 27\nu_2' \qquad \text{(уравнения Н. Никчемного).}^{*)} \tag{20}$$

Картезианская версия. Зададим дифференциальную K-алгебру $\mathcal{Y}$ в локализации $F_4[\sigma_{01}^{-1}, d^{-1}]$ свободной дифференциальной K-алгебры F_4 с четырьмя свободными порождающими x, y, d, w тремя дифференциальными соотношениями (Декарта-Гука):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ d \end{pmatrix}''' = 3 \cdot \frac{(\sigma_{01}/d)'}{\sigma_{01}/d} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ d \end{pmatrix}'' - w \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ d \end{pmatrix}' \qquad \left(\frac{(\sigma_{01}/d)'}{\sigma_{01}/d} = \frac{\sigma_{01}'}{\sigma_{01}} - \frac{d'}{d} \right). \tag{21}$$

Определение K-алгебры $\mathcal{Y}$ подразумевает (см. (21)), что $\mathcal{Y}$ может быть реализована, как дифференциальная K-подалгебра, в поле рациональных функций $K(x'', y'', d'', x', y', d', x, y, d, w, \ldots, w^{(q)}, \ldots)$, на которое дифференцирование $'$ продолжается в соответствии с соотношениями (21). Следовательно, $\mathcal{Y}$ - область целостности, а её поле частных $Q(\mathcal{Y})$ является полем рациональных функций. Обозначим $Q(\mathcal{Y})[\sigma_{12}^{1/3}]$ дифференциальное поле, получающееся присоединением к $Q(\mathcal{Y})$ корня кубического из σ_{12} ($(\sigma_{12}^{1/3})' \overset{def}{=} (\sigma_{12}'/\sigma_{12}) \cdot \sigma_{12}^{1/3}$). Положим $\eta \overset{def}{=} \sigma_{12}^{1/3} \cdot d/\sigma_{01}$. Применяя соотношение (21) для исключения во встречающихся выражениях x''', y''', d''', последовательно получаем, что

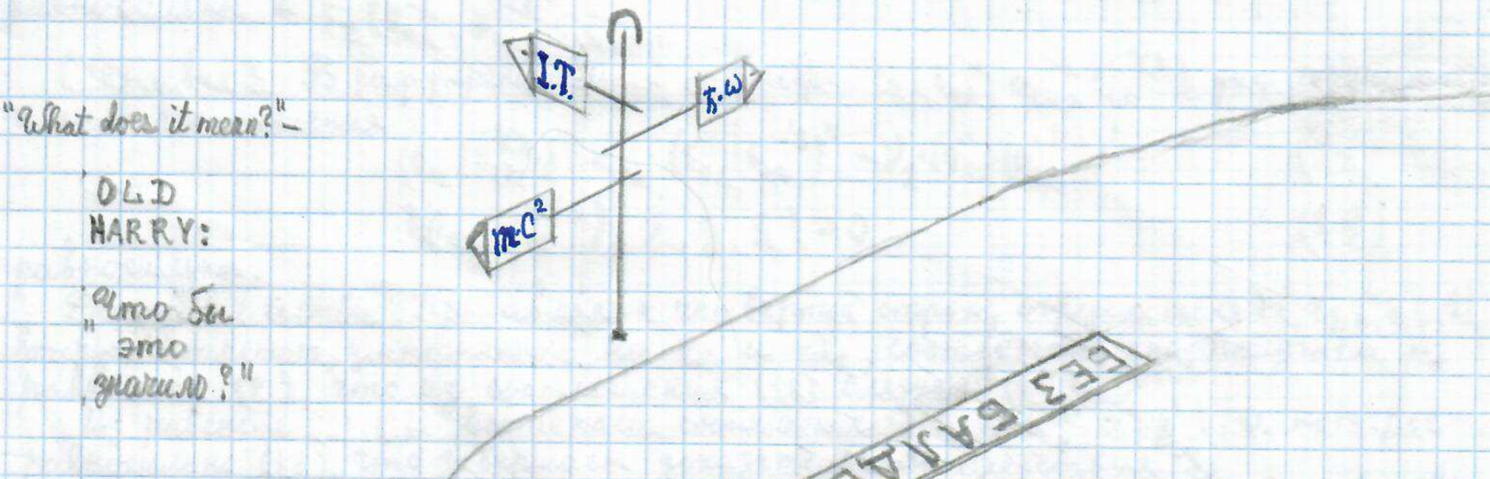
$$\sigma_{12}'/\sigma_{12} = 3(\sigma_{01}'/\sigma_{01} - d'/d), \quad \sigma_{23}/\sigma_{12} = w, \quad \eta'/\eta = \tfrac{1}{3}\sigma_{12}'/\sigma_{12} + d'/d - \sigma_{01}'/\sigma_{01} = 0,$$

т.е.

$$\eta' = 0, \quad d = \eta \cdot \sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3} \tag{22}$$

Лемма 3. В дифференциальной K-алгебре $\mathcal{Y}$ выполняется соотношение $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$.

Доказательство. Подставляя $d = \eta \cdot \sigma_{01}/\sigma_{12}^{1/3}$ в (21), с учётом (22) и того, что $w = \sigma_{23}/\sigma_{12}$, получаем соотношение (17) (а также (19)) и утверждение леммы вытекает из следствия 3 (а также замечания 3).



*) Невооружённым глазом видно (см. (2), (3)), что $B = K[x'', y'', x', y', \nu_1', x, y, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_2^{(q)}, \ldots]$ - область целостности, на которой дифференцирование $'$ действует естественным образом $(w^{(q)})' = w^{(q+1)}$, а $(x'', y'')'$, $(\nu_1')'$ определяется в соответствии с (2) и (3). Вычисления п. 1.1 показывают, что

а) в дифференциальной подалгебре $\overline{W}$, порождённой x, y в B, выполняется соотн. $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$,

б) естественный гомоморфизм $\varphi: W \to \overline{W}$ продолжается до эпиморфизма $\hat{\varphi}: W[\sigma_{12}^{-1}] \to B[\sigma_{12}^{-1}]$,

в) естественный гомоморфизм $\psi: B \to W[\sigma_{12}^{-1}]$ продолжается до эпиморфизма $\hat{\psi}: B[\sigma_{12}^{-1}] \to W[\sigma_{12}^{-1}]$,

г) $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$ - тождественное отображение на $B[\sigma_{12}^{-1}]$, т.е. дифференциальная K-алгебра $W[\sigma_{12}^{-1}]$ изоморфна $B[\sigma_{12}^{-1}]$ и, следовательно $W[\sigma_{12}^{-1}]$ - область целостности.

Зададим картезианский стандарт (тензор Декарта – Гука), полагая (см. п. 1.2)

$$(H)=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{18}\cdot\frac{d}{\sigma_{01}\sigma_{12}^{3}}\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Следствие 4. В дифференциальной K-алгебре $\underline{\mathcal{Y}}[\sigma_{12}^{-1}]$ выполняются равенства

$$h_{11}x^2+2h_{12}xy+h_{22}y^2+2h_{31}x+2h_{32}y+h_{33}=0, \qquad (24)$$

$$h_{31}x+h_{32}y+h_{33}=d, \qquad (25)$$

$$h_{11}x'^2+h_{12}x'y'+h_{22}y'^2=\frac{\sigma_{01}^2}{d^2}\cdot\det(H), \qquad (26)$$

$$\sigma_{12}=\frac{\sigma_{01}^3}{d^3}\cdot\det(H), \qquad (27)$$

$$(h_{ij})'=0 \quad (i,j=1,2,3). \qquad (28)$$

Доказательство. Соотношения (24), (25), (26), (27) равносильны (4), (5), (6), (8), "соответственно". Из (21), (13) последовательно получаем $\sigma_{12}'/\sigma_{12}=3\cdot(\sigma_{01}'/\sigma_{01}-d'/d)$,

$$h_{ij}'/h_{ij}=d'/d-\sigma_{01}'/\sigma_{01}-3\sigma_{12}'/\sigma_{12}+g_{ij}'/g_{ij}=10\cdot(d'/d-\sigma_{01}'/\sigma_{01})+\frac{10}{3}\cdot\sigma_{12}'/\sigma_{12}=0,$$

т.е. $h_{ij}'=0$. Следствие доказано.

Теорема о директрисе (О.В. Герасимова). Если для плоской аналитической кривой $x(z), y(z)$ выполняются равенства

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}'''=3\cdot\left(\sigma_{01}'/\sigma_{01}-\frac{\alpha x'(z)+\beta y'(z)}{\alpha x+\beta y+\delta}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}''-w\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' \quad (\alpha,\beta,\delta\in K=\mathbb{R},\mathbb{C}),$$

то эта кривая лежит на некоторой квадратичной кривой вида $h_{11}x^2+2h_{12}xy+h_{22}y^2+2\alpha x+2\beta y+\delta=0$.

Доказательство. Невооружённым глазом видно, что если в уравнения (21) подставить $d=\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta$, то третье уравнение будет следствием первых двух, а в тензоре (H) элементы $h_{31}=h_{13}$, $h_{32}=h_{23}$, h_{33} совпадают с α, β, δ, соответственно. Утверждение теоремы полностью доказано. (См. также [3], лемма о директрисе и фокусе.)

Предложение 4. Если аналитические (действительные) функции $x(t), y(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}'''=\frac{3}{2}\,\frac{\left((xy'-x'y)/(x^2+y^2)\right)'}{(xy'-x'y)/(x^2+y^2)}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}''-w\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}', \text{*)} \qquad (29)$$

то плоская кривая $(x(t),y(t))$ лежит на квадратичной кривой с фокусом в начале координат.

Доказательство. We leave it as an exercise for the reader. :) **)

Замечание 4. Зададим дифференциальный гомоморфизм $\varphi: F_4\to\underline{\mathcal{Y}}$, полагая $\varphi(x)=x$, $\varphi(y)=y$, $\varphi(v_1)=3(\sigma_{01}'/\sigma_{01}-d'/d)$, $\varphi(v_2)=w$. Из леммы 3 и следствия 2 вытекает, что φ пропускается через K-алгебру B ($\varphi: F_4\to B\to\underline{\mathcal{Y}}$). Так как поле $Q(\underline{\mathcal{Y}})$ порождается (как поле) над подполем $Q(\varphi(B))$ элементом d ($d'=d\cdot(\sigma_{01}'/\sigma_{01}-\frac{1}{3}\varphi(v_1))$), то из соображений размерности

$$(\deg Q(B)/K(v_1,v_1',\dots)=8,\ \deg Q(\underline{\mathcal{Y}})/K(w,w',\dots)=9)$$

гомоморфизм φ является вложением и

$$Q(\underline{\mathcal{Y}})=Q(\varphi(B))(d),\quad \underline{\mathcal{Y}}\simeq(B[\sigma_{01}^{-1}])[d,d^{-1}]\ (d'=d\cdot(\sigma_{01}'/\sigma_{01}-\tfrac{1}{3}v_1)).$$

---

*) Сравни с уравнениями (1).

**) Нам Гравилёт, вперёд лети! На Марсе – остановка. (В настройку струн нас, Ghost, введи. – В руках у нас – ключ-фомка...)

1.5. Картезианский гамбит (фокусы-покусы и лотосы). В предложении 4 мы уже предприняли слабую попытку направить наш бронепоезд Декарта-Гука (см. (21)) вместе с читателем в традиционный тупик: $d^2 = x^2+y^2$. Досконально изучив собственную рукопись [4] (в частности свойства q-псевдометрик О.В. Герасимовой) и проникнись техникой декартовых воронок, задаваемых уравнением $\nu_1 = \nu_2' N_2$ (см. (2),(3) и (20)), мы получили веские аргументы в пользу того, что третье уравнение в (29) является следствием первых двух (так как выражение $(xy'-x'y)^2/(x^2+y^2)$ есть q-псевдометрика О.В. Герасимовой при $q(x,y)=x^2+y^2$). Here you are

Теорема о фокусе (Я. Никчемный). Пусть дифференциальная K-алгебра $\mathcal{E}$ задана в локализации $F_3[\sigma_{01}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}, (x^2+y^2)^{-1}]$, где F_3 – свободная дифференциальная K-алгебра с тремя свободными порождающими x, y, w, дифференциальными соотношениями (1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}''' = \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\sigma_{01}^2/(x^2+y^2)\right)'}{\sigma_{01}^2/(x^2+y^2)}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' - w\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'.$$

Тогда в её квадратичном расширении $\mathcal{E}[d]$ $\left(d^2=x^2+y^2,\ d' \overset{\text{def}}{=} (xx'+yy')\frac{d}{x^2+y^2}\right)$ имеет место равенство-призрак:

$$d''' = \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\sigma_{01}^2/(x^2+y^2)\right)'}{\sigma_{01}^2/(x^2+y^2)}\cdot d'' - w\cdot d'. \qquad (30)$$

В частности $|d', x', y'| = 0$, $|d, x, y, 1| = 0$, $|x, y, 1| = -\sigma_{12}$,

$$|x,y,1|\cdot d - |d,y,1|\cdot x + |d,x,1|\cdot y - |d,x,y|\cdot 1 = 0,$$

т.е.

$$d = \alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta,\quad \alpha' = \beta' = \delta' = 0 \quad \left(\alpha = \frac{|d,y,1|}{|x,y,1|},\ \beta = -\frac{|d,x,1|}{|x,y,1|},\ \delta = \frac{|d,x,y|}{|x,y,1|}\right). \qquad (31)$$

Доказательство. Подставляя в (30)

$$d' = (xx'+yy')/d,\quad d'' = (\sigma_{01}^2/d^2 + xx''+yy'')/d,$$

$$d''' = \left((\sigma_{01}^2/d^2)' + x'x''+y'y''+xx'''+yy'''\right)/d - (\sigma_{01}^2/d^2 + xx''+yy'')\,\frac{xx'+yy'}{d^3}$$

и избавляясь в получившемся соотношении от x''', y''' при помощи (1) убеждаемся (без компьютера) в справедливости равенства (30). Формулы (31), как было указано в п. 1.2, вытекают из соотношения Капелли $|d, x, y, 1| = 0$ (общие свойства соотношения $|a_1, \dots, a_m| = 0$ см. в работе [2]).

Следствие 5. Для любого аналитического решения $x(z), y(z)$ уравнений (1), для которого $x'(z)y''(z) - x''(z)y'(z) \neq 0$, плоская кривая $(x(z), y(z))$ лежит на некоторой квадратичной кривой вида $x^2+y^2 = (\alpha x + \beta y + \delta)^2$, где $\alpha, \beta, \delta \in K$ $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Доказательство. Подставить $x(z), y(z)$ в соотношения (31).

Замечание 5. Как нетрудно видеть, семейство квадратичных кривых $\{x^2+y^2 = (\alpha x+\beta y+\delta)^2 \mid \alpha, \beta, \delta \in K\}$ – это проекции плоских сечений конуса $z^2 = x^2+y^2$ вдоль оси вращения на плоскость Oxy. В рукописи [4] была предпринята попытка предложить некоторые дифференциально-алгебраические модели, получающиеся заменой конуса на произвольную поверхность второго порядка $F(x,y,z) = 0$. Возникающие в этом случае семейства $\{F(x, y, \alpha x+\beta y+\delta) \mid \alpha, \beta, \delta \in K\}$ кривых второго порядка и дифференциальные алгебры существенно зависят от того в первой или второй степени переменная z входит в $F(x,y,z)$. В работе [4] мы сосредоточились на варианте, когда $\deg_z F = 2$. Квазиптолемеев случай $\deg_z F(x,y,z) = 1$, по-своему, также весьма любопытен.

1.5.1. Лилии в пруду: квазиптолемеевы (q, ℓ)-псевдометрики.

1.5.1. Лилия в пруду: квазиптолемеевы (q,l)-псевдометрики. Зафиксируем два взаимнопростых многочлена $l(x,y) \stackrel{def}{=} l_0 + l_1 x + l_2 y$ $(l_0, l_1, l_2 \in K)$, $q(x,y) = q_{11}x^2 + 2q_{12}xy + q_{22}y^2 + q_{31}x + q_{32}y + q_{33}$ $(q_{ij} \in K,\ i,j = 1,2,3)$ и определим семейство "квадратичных" кривых, полагая

$$W_{q,l} \stackrel{def}{=} \{q(x,y) = l(x,y)\cdot(\alpha x + \beta y + \delta) \mid \alpha, \beta, \delta \in K\}.$$

Для каждой кривой из этого семейства зададим дифференциальную K-алгебру $W_{\alpha,\beta,\delta}$ двумя дифференциальными переменными x, y и одним дифференциальным соотношением

$$q(x,y) = l(x,y)\cdot(\alpha x + \beta\cdot y + \delta) \qquad (32)$$

Пусть $(H) = (h_{ij})$ - это 3×3 матрица квадратичной функции

$$H_{\alpha,\beta,\delta}(x,y) \stackrel{def}{=} q(x,y) - l(x,y)\cdot(\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta).$$

Тогда

$$h_{11}x^2 + 2h_{12}\cdot xy + h_{22}\cdot y^2 = q_{11}x^2 + 2q_{12}xy + q_{22}\cdot y^2 - (l_1 x + l_2 y)(\alpha x + \beta y + \delta),$$

$$-h_{11}x'^2 - 2h_{12}x'y' - h_{22}y'^2 = -q_{11}x'^2 - 2q_{12}x'y' - q_{22}y'^2 + (l_1 x' + l_2 y')(\alpha x' + \beta y').$$

Из определяющего соотношения (32) находим, что

$$\alpha x' + \beta y' = (q(x,y)/l(x,y))',$$

т.е. в локализации $W_{\alpha,\beta,\delta}[l^{-1}]$ выполняется равенство

$$-(x', y')\cdot\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} = -(x', y')\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} + l'(x,y)\cdot\left(\frac{q(x,y)}{l(x,y)}\right)'.$$

Обозначим $b_{(q,l)}$ правую часть этой формулы. Очевидно, что $b_{(q,l)}$ - квадратичная форма от x', y', задающая рационально (q,l)-"псевдометрику" на аффинной плоскости (независимо от выбора кривой в $W_{q,l}$). Но мы знаем (см. (26), (27)), что в $W_{\alpha,\beta,\delta}$

$$-(h_{11}x'^2 + 2h_{12}x'y' + h_{22}y'^2)^3 = \det(H_{\alpha,\beta,\delta})\cdot\sigma_{12}^2 \qquad \left(\sigma_{12} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y''\end{vmatrix}\right),$$

и мы последовательно получаем в $W_{\alpha,\beta,\delta}[l^{-1}]$

$$(b_{(q,l)})^3 = \det(H_{\alpha,\beta,\delta})\cdot\sigma_{12}^2$$

$$\sigma_{12}'/\sigma_{12} = \frac{3}{2}\, b_{(q,l)}'/b_{(q,l)} \qquad (33)$$

Последнее равенство не содержит α, β, δ и, следовательно, выполняется во всех дифференциальных K-алгебрах $W_{\alpha,\beta,\delta}[l^{-1}]$. Напрашивается вопрос: насколько (q,l)-псевдометрика (квадратичная форма) $b_{(q,l)}$ характеризует семейство квадратичных кривых $W_{q,l}$? Here you are

Теорема о (q,l)-псевдометриках (Gold Fish & K°). Пусть дифференциальная K-алгебра $F_{q,l}$ задана в локализации $F_3[l^{-1}, b_{(q,l)}^{-1}, \sigma_{12}^{-1}]$, где F_3 - свободная дифференциальная K-алгебра с тремя порождающими x, y, w, двумя определяющими соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}''' = \frac{3}{2}\left(b_{(q,l)}'/b_{(q,l)}\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}'' - w\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}' \qquad (34)$$

Тогда в ней выполняется равенство

$$(q/l)''' = \frac{3}{2}\left(b_{(q,l)}'/b_{(q,l)}\right)\cdot(q/l)'' - w\cdot(q/l)',$$

в частности, $|q/l, x, y, 1| = 0$, $|x, y, 1| = -\sigma_{12}$,

$$q(x,y)/l(x,y) = \alpha\cdot x + \beta y + \delta \quad \left(\alpha = \frac{|q/l, y, 1|}{|x, y, 1|},\ \beta = -\frac{|q/l, y, 1|}{|x, y, 1|},\ \delta = \frac{|q/l, x, y|}{|x, y, 1|},\ \alpha' = \beta' = \delta' = 0\right) \quad (35)$$

Доказательство. We leave it as an exercise to the reader. ☺

Следствие 6. Для любого аналитического решения $x(z), y(z)$ уравнения (34), для которого $x'(z)\cdot y''(z) - x''(z)\cdot y'(z) \not\equiv 0$, плоская кривая $(x(z), y(z))$ лежит на некоторой квадратичной кривой из $W_{q,l}$.

Доказательство. Подставить $x(z), y(z)$ в соотношения (35).

1.5.2. Со дна-погуще: тёмные тела и картезианские q-псевдометрики. Зафиксируем квадратичный многочлен

$$q(x,y) = q_{11}x^2 + 2q_{12}xy + q_{22}y^2 + q_{31}x + q_{32}y + q_{33},$$

который не является квадратом линейной функции. Определим семейство квадратичных кривых

$$V_q \overset{def}{=} \{q(x,y) = (\alpha x + \beta y + \delta)^2 \mid \alpha, \beta, \delta \in K\}.$$

Для каждой кривой из V_q зададим дифференциальную K-алгебру $V_{\alpha,\beta,\delta}$ двумя дифференциальными переменными x, y и одним дифференциальным соотношением

$$q(x,y) = (\alpha x + \beta y + \delta)^2 \qquad (36)$$

Пусть $(H_{\alpha,\beta,\delta}) = (h_{ij})$ – это симметрическая 3×3 матрица квадратичной функции

$$H_{\alpha,\beta,\delta}(x,y) \overset{def}{=} (\alpha x + \beta y + \delta)^2 - q(x,y).$$

Тогда

$$-h_{11}x'^2 - 2h_{12}x'y' - h_{22}y'^2 = q_{11}x'^2 + 2q_{12}x'y' + q_{22}y'^2 - (\alpha x' + \beta y')^2.$$

Дифференцируя обе части соотношения (36) находим, что

$$(\alpha x' + \beta y')^2 = \frac{1}{4}\cdot q'(x,y)/q(x,y),$$

т.е. в локализации $V_{\alpha,\beta,\delta}[q^{-1}]$ выполняется равенство

$$-(x', y')\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} = (x', y')\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\, q'(x,y)/q(x,y).$$

Обозначим b_q выражение в правой части этой формулы. Очевидно, что b_q – квадратичная форма от x', y', задающая рациональную q-"псевдометрику" на аффинной плоскости (не зависящую от α, β, δ). Но мы знаем (см. соотношения (26), (27)), что в $V_{\alpha,\beta,\delta}$

$$-(h_{11}x'^2 + 2h_{12}x'y' + h_{22}y'^2)^3 = \det(H_{\alpha,\beta,\delta})\cdot \sigma_{12}^2 \qquad \left(\sigma_{1,2} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y''\end{vmatrix}\right),$$

и мы последовательно в $V_{\alpha,\beta,\delta}[q^{-1}]$ получаем $b_q^3 = \det(H_{\alpha,\beta,\delta})\cdot\sigma_{12}^2$

$$\sigma_{12}'/\sigma_{12} = \frac{3}{2}\, b_q'/b_q \qquad (37)$$

Последнее равенство не содержит α, β, δ и, следовательно, выполняется во всех дифференциальных K-алгебрах $V_{\alpha,\beta,\delta}[q^{-1}]$.

Вопрос: „характеризует ли q-псевдометрика (квадратичная форма) b_q (и каким образом) семейство квадратичных кривых V_q?" Here you are.

Теорема о q-псевдометриках (О.В. Герасимова). Пусть дифференциальная K-алгебра $\mathcal{G}_q$ задана в локализации $F_3[q^{-1}, b_q^{-1}, \sigma_{12}^{-1}]$, где F_3 – свободная дифференциальная K-алгебра с тремя свободными порождающими x, y, w, двумя определяющими соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}''' = \frac{3}{2}\,(b_q'/b_q)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}'' - w\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}'. \qquad (38)$$

Тогда в её квадратичном расширении $\mathcal{G}_q[d]$ ($d^2 = q$, $d' = d\cdot q'/q$) выполняется равенство-признак

$$d''' = -\frac{3}{2}(b_q'/b_q)\cdot d'' - w\, d',$$

в частности, $|d', x', y'| = 0$, $|d, x, y, 1| = 0$, $|x, y, 1| = -\sigma_{12}$,

$$|x,y,1|\cdot d - |d,y,1|\cdot x + |d,x,1|\cdot y - |d,x,y|\cdot 1 = 0,$$

т.е.

$$d = \alpha\cdot x + \beta y + \delta,\ \alpha' = \beta' = \delta' = 0 \quad \left(\alpha = \frac{|d,y,1|}{|x,y,1|},\ \beta = -\frac{|d,x,1|}{|x,y,1|},\ \delta = \frac{|d,x,y|}{|x,y,1|}\right). \qquad (39)$$

Доказательство. We leave it as an exercise to the reader. ☺

Следствие 7. Для любого аналитического решения $x(z), y(z)$ уравнений (38), для которого $x'(z)\cdot y''(z) - x''(z)\cdot y'(z) \not\equiv 0$, плоская кривая $(x(z), y(z))$ лежит на некоторой квадратичной кривой вида $q = (\alpha x + \beta y + \delta)^2$ ($\alpha, \beta, \delta \in K, K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Доказательство. Подставить $x(z), y(z)$ в соотношения (39).

1.5.3. An explanation: лотос-эффект. Пусть $\mathcal{L}(x,y)$ – произвольная аналитическая функция*) от двух переменных. Рассмотрим семейство кривых

$$W_{\mathcal{L}} \overset{def}{=} \{\mathcal{L}(x,y) = \alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta \mid \alpha,\beta,\delta \in K = R, C\}.$$

Зададим "дифференциальную K-алгебру" с порождающими x, y и одним "дифференциальным соотношением" Капелли

$$|\mathcal{L}(x,y), x, y, 1| = 0. \qquad (40)$$

Очевидно, что все аналитические решения $x(z), y(z)$ этого уравнения, для которых $|x'(z), y'(z)| \not\equiv 0$, лежат на какой-то кривой из семейства $W_{\mathcal{L}}$.

Как мы неоднократно отмечали выше уравнение (типа) (40) по модулю первого призрака второго закона (2):

$$(x,y)''' = \nu_1\cdot(x,y)'' - \nu_2\cdot(x,y)' \quad (\nu_1 = \sigma_{12}'/\sigma_{12},\ \nu_2 = \sigma_{23}/\sigma_{12}) \ -$$

равносильно в $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}[\sigma_{12}^{-1}]$ уравнению

$$\mathcal{L}''' = \nu_1\cdot\mathcal{L}'' - \nu_2\cdot\mathcal{L}'. \qquad (41)$$

Так как

$$\mathcal{L}' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} y',$$

$$\mathcal{L}'' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} x'' + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} y'' + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}\cdot x'^2 + 2\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y}\cdot x'y' + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2}\cdot y'^2$$

$$\mathcal{L}''' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} x''' + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} y''' +$$

$$+\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2} x'x'' + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y}(x'y'' + x''y') + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y} y'y'' + \left(\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2} x'^2 + 2\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y} x'y' + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2}\cdot y'^2\right)',$$

то равенство (41), благодаря первому призраку второго закона, позволяет выразить $\nu_1 = \sigma_{12}'/\sigma_{12}$ рационально через x', y', x'', y'' и частные производные $\mathcal{L}(x,y)$:

$$\nu_1 = \frac{\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2 x^2}\cdot x'x'' + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y}(x'y''+x''y') + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2 y^2}\cdot y'y'' + \left(\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2 x^2} x'^2 + 2\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y} x'y' + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2} y'^2\right)'}{\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}\cdot x'^2 + 2\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y}\cdot x'y' + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2} y'^2}.$$

Следовательно, при таком ν_1 уравнение (41) является следствием уравнений (3).

Это доказвает, что справедлива следующая

Теорема об $\mathcal{L}$-настройке (Master Key). Для любого "аналитического" решения $x(z), y(z)$ $(x'(z)\cdot y''(z) - x''(z)\cdot y'(z) \not\equiv 0)$ векторного дифференциального уравнения

$$\vec{z}''' = \left(\left(b_{\mathcal{L}}(\vec{z}', \vec{z}'') + (b_{\mathcal{L}}(\vec{z}', \vec{z}'))'\right)/b_{\mathcal{L}}(\vec{z}', \vec{z}')\right)\cdot\vec{z}'' - w\cdot\vec{z}',$$

где $\vec{z} \overset{def}{=} (x,y)$, $\mathcal{L}(x,y)$ – мероморфная аналитическая функция на аффинной плоскости K^2 $(K = R, C)$, $b_{\mathcal{L}}$ – билинейная форма на векторах $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ равная

$$(u_1, u_2)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix},$$ $(w = w(z))$, выполняются следующие равенства

$$|\mathcal{L}(x(z), y(z)), x(z), y(z), 1| = 0, \quad w(z) = (x''(z)\cdot y'''(z) - x'''(z)y''(z))/(x'(z)\cdot y''(z) - x''(z)\cdot y'(z)),$$ т.е. плоская кривая $(x(z), y(z))$ лежит на некоторой кривой $\mathcal{L}(x,y) = \alpha x + \beta y + \delta$ $(\alpha, \beta, \delta \in K)$.

Эта теорема позволяет при $\mathcal{L}(x,y) = q(x,y)/\ell(x,y)$, $\mathcal{L}(x,y) = (q(x,y))^{1/2}$ избежать непосредственных вычислений в п.п. 1.5.1, 1.5.2, соответственно. Но мы крайне признательны Золотой Рыбке, вынудившей нас напороться на (q,ℓ) и q-псевдометрики и соотношения (33), (37). ☺

---

*) Мероморфная на аффинной плоскости.

1.6. FINAL CAPTIONS

The End

TOTAL RECALL (mathematicians only)

Почему, мой друг, не сжечь
Труд Декарта, сунув в печь?
А поверх, причём здесь честь,
Портрет Гука мог бы лечь...

Чтоб с высот гигантов плеч
Сквозь лорнет в эфир глядеть,
Волн пигмея не узреть...

Ересь прочую пресечь,
Свод законов уберечь
От никчёмных с Праге встреч...

Примирись и не перечь!
Их проект не стоит свеч,
Наш – внедряет "массу" в речь

One

Чтоб коперников увлечь
Мысль научную стеречь,
От прозрения отвлечь;

Two

Перебежчиков презреть:
В технологии вовлечь,
По шарашкам запереть,
В педагогику привлечь;

Three

Болтунам – хвала и честь:
Их на кафедры упечь
(На риторику налечь –
Попугаев там не счесть);

Four

Силу мысли одолеть, /* cogito ergo sum */
Дух сомнения стереть, /* de omnibus dubitandum */
За Кавендишем смотреть,
Вместе с Гюйгенсом пригреть...

CLOSING WORDS

Ренегат покинул свет,
Канул в лету душевед,
/* Сгнит, прозрев, апологет, */
Майкельсона больше нет...

Но спустя миллионы лет,
Сквозь эфир доходит цвет
Всех исчезнувших планет,
Положивших на проект...